



„85 % der Leute, die eine Maske tragen, stecken sich mit COVID an.“ ■ Typische Fehler im Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und Visualisierungsmöglichkeiten für die Sekundarstufe I

Forum Mathematik-Didaktik Bamberg

**Prof. Dr. Karin Binder
7. November 2023**



WAS IST DAS????



”

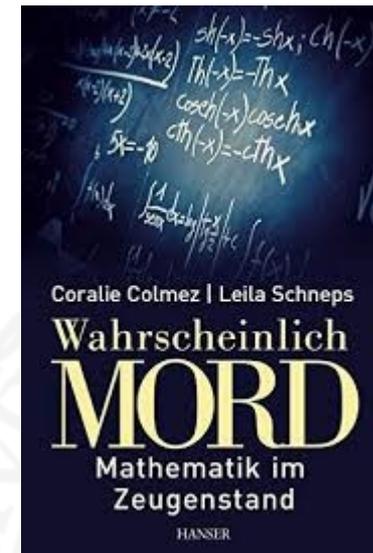
Aber schauen Sie mal...wir haben jetzt **jeden vierten Deutschen** geimpft.

Diese Woche wird es noch **jeder Fünfte** werden.

Folgen des statistischen Analphabetismus

➤ Fehlentscheidungen vor Gericht
SCHNEPS & COLMEZ (2013)

➤ Fälle von Überdiagnosen und
Überbehandlungen
WEGWARTH & GIGERENZER (2013)



Gliederung

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten und „Bayesianische Aufgaben“
- Visualisierung von Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule anbahnen
- Typische Fehler im Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten



Bedingte Wahr- scheinlichkeiten und „Bayesianische Aufgaben“



Mammographie-Aufgabe EDDY (1982)



EREIGNISSE

- B** Frau ist an Brustkrebs erkrankt
- \bar{B}** Frau ist nicht an Brustkrebs erkrankt
- T+** Frau erhält ein positives Testergebnis
- T-** Frau erhält ein negatives Testergebnis

**WAHRSCHEIN-
LICHKEITEN**

- P(B)** Prävalenz
- $P_B(T+)$** Sensitivität des Diagnoseverfahrens
- $P_{\bar{B}}(T+)$** Falsch-Positiv-Rate

**FORMEL
VON BAYES**

$$P_{T+}(B) = \frac{P_B(T+) \cdot P(B)}{P_B(T+) \cdot P(B) + P_{\bar{B}}(T+) \cdot P(\bar{B})}$$

?

Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten

(EDDY, 1982; GIGERENZER & HOFFRAGE, 1995;
SIEGRIST & KELLER, 2011, MCDOWELL & JACOBS, 2017, ETC.)



Variante mit Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **2%**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält **80%**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält **10%**.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht und ein positives Testergebnis erhält, tatsächlich Brustkrebs hat?

Antwort: ca. 14 %

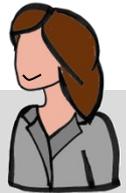
Prävalenz $P(B)$: 2%

Sensitivität $P_B(T+)$: 80%

Falsch-Positiv-Rate $P_{\bar{B}}(T+)$: 10%

Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten

(EDDY, 1982; GIGERENZER & HOFFRAGE, 1995; SIEGRIST & KELLER, 2011, MCDOWELL & JACOBS, 2017, ETC.)



Variante mit Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **2%**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält **80%**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält **10%**.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht und ein positives Testergebnis erhält, tatsächlich Brustkrebs hat?

Antwort: ca. 14 %

Variante mit natürlichen Häufigkeiten

200 von **10.000** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

160 von **200** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.

980 von **9.800** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.

Frage: Wie viele der Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Testergebnis erhalten, haben Brustkrebs?

Antwort: 160 von 1.140



Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten

(EDDY, 1982; GIGERENZER & HOFFRAGE, 1995; SIEGRIST & KELLER, 2011, MCDOWELL & JACOBS, 2017, ETC.)



Variante mit Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **2%**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält **80%**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält **10%**.

Lösungsrate:
ca. 5 %

Antwort: ca. 14 %



Variante mit natürlichen Häufigkeiten

20
un

Prävalenz $P(B)$: 2%

16
un
er

Sensitivität $P_B(T+)$: 80%

98
un
hal

Falsch-Positiv-Rate $P_{\bar{B}}(T+)$: 10%

Frage: Wie viele der 1.140 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, erhalten ein positives Testergebnis?

Lösungsrate:
ca. 25 %

Antwort: 160 von 1.140

Empirische Befunde zu Bayesianischem Denken

Personenspezifische Merkmale

- Experten vs. Novize
bzw. Domäne LESAGE ET AL. (2013), SIROTA ET AL. (2014)
- Schüler*innen der Grundschule
ZHU & GIGERENZER, (2006)
- Numeracy
HILL & BRASE (2012); JOHNSON & TUBAU (2013), BRASE (2021)
- Intelligenz LESAGE ET AL. (2013), McNAIR (2015)
- Raumvorstellungsvermögen
OTTLEY ET AL. (2016)

- Informationsformat
(Wahrscheinlichkeiten vs. Häufigkeiten)
GIGERENZER & HOFFRAGE (1995), McDOWELL & JACOBS (2017), ETC.
- Visualisierung
BINDER ET AL. (2015, 2018, 2020, 2021), EICHLER ET AL. (2019, 2020), McDOWELL & JACOBS (2017), ETC.
- Kontext
SIEGRIST & KELLER (2011), McDOWELL & JACOBS (2017), ETC.

Aufgabenspezifische Merkmale

Visualisierung von Wahrschein- lichkeiten



Visualisierung Bayesianischer Aufgaben

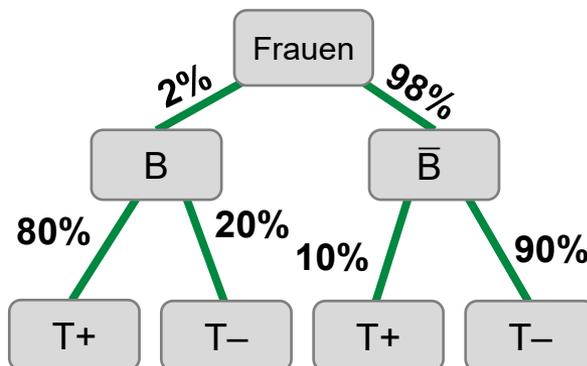
Darstellung		Autor(en)																
Ikonische Darstellung		BRASE (2008, 2014), OTTLEY ET AL. (2012), MICALLEF ET AL. (2012), ZIKMUND-FISHER ET AL. (2014)																
Rasterdiagramm		GARCIA-RETAMERO & HOFFRAGE (2013), COSMIDES & TOOBY (1996), SEDLMEIER & GIGERENZER (2001)																
Eulerdiagramm		BRASE (2008) OTTLEY ET AL. (2012), MICALLEF ET AL. (2012), SLOMAN ET AL. (2003), SIROTA ET AL. (2014), REANI ET AL. (2018)																
Einheitsquadrat		BÖCHERER-LINDER, EICHLER & VOGEL (2017), OLDFORD & CHERRY (2006), PFANNKUCH & BUDGETT (2017), TALBOY & SCHNEIDER (2017)																
Vierfeldertafel	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>B</th> <th>\bar{B}</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>T+</th> <td>160</td> <td>980</td> <td>1.140</td> </tr> <tr> <th>T-</th> <td>40</td> <td>8.820</td> <td>8.860</td> </tr> <tr> <th></th> <td>200</td> <td>9.800</td> <td>10.000</td> </tr> </tbody> </table>		B	\bar{B}		T+	160	980	1.140	T-	40	8.820	8.860		200	9.800	10.000	BINDER, KRAUSS & BRUCKMAIER (2015), STECKELBERG ET AL. (2014)
	B	\bar{B}																
T+	160	980	1.140															
T-	40	8.820	8.860															
	200	9.800	10.000															
(Doppel-) Baumdiagramm		BINDER ET AL. (2015, 2018, 2020, 2021), WASSNER (2004), WASSNER, MARTIGNON & BIEHLER (2004) YAMAGISHI (2003), KHAN ET AL. (2015)																

Visualisierung Bayesianischer Aufgaben

BINDER, KRAUSS, & BRUCKMAIER (2015)

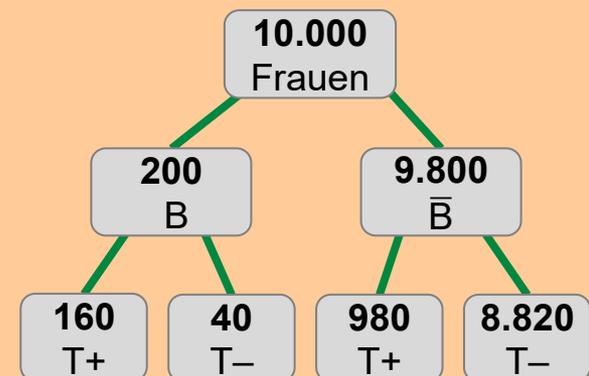
Anteile/
Wahrscheinlichkeiten

	B	\bar{B}	
T+	1,6%	9,8%	11,4%
T-	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%



Absolute Häufig

	B	\bar{B}	
T+	160	980	1.140
T-	40	8.820	8.860
	200	9.800	10.000



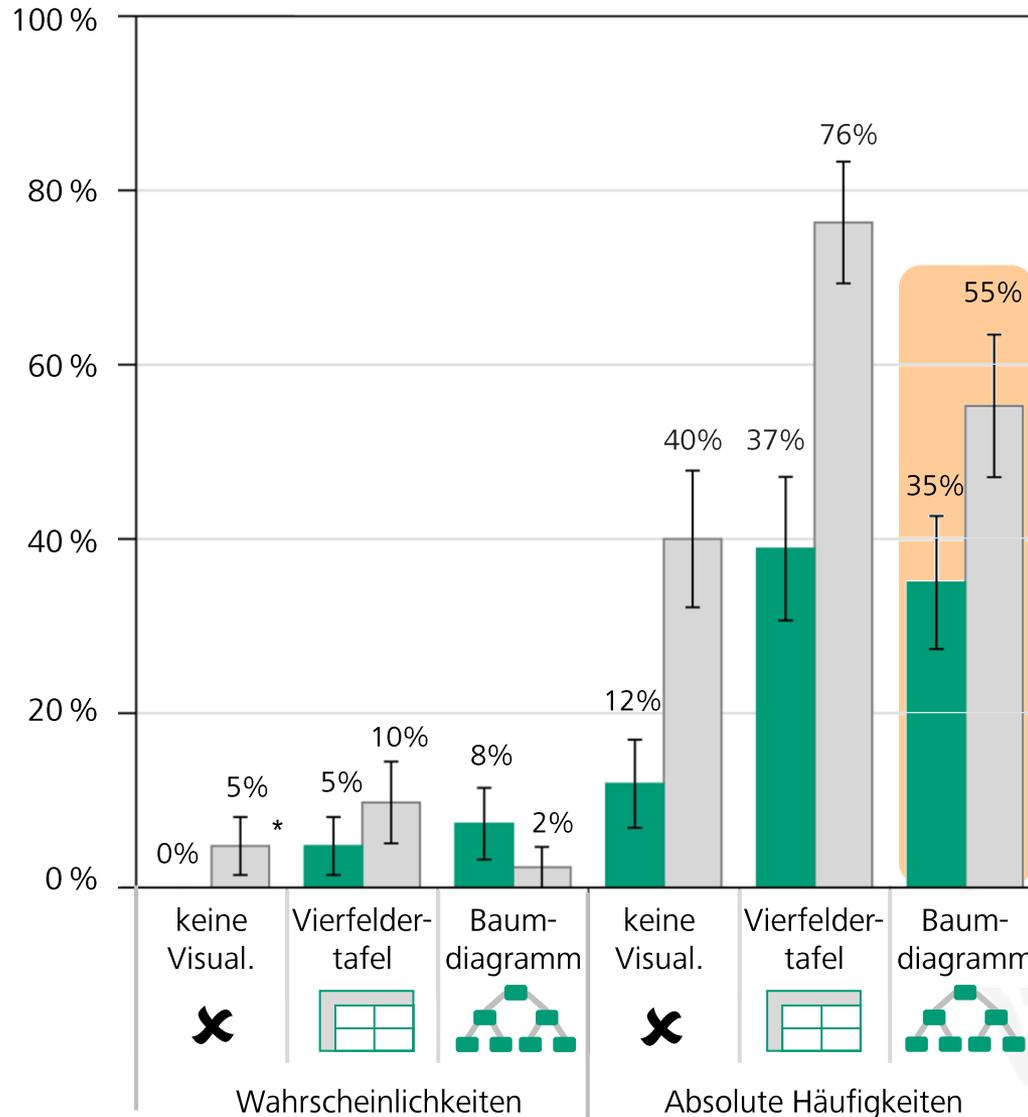
Vierfelder-
tafel

Baum-
diagramm

Ergebnisse ■ Wirksamkeit dieser vier Visualisierungen

BINDER, KRAUSS & BRUCKMAIER (2015)

Anteil korrekter Antworten



Studienteilnehmer:

259 Schüler (Gymnasium, 11. Klasse)

- Früherkennung von Brustkrebs
- Persönlichkeits-eigenschaft

* Fehlerbalken zeigen den einfachen Standardfehler

Visualisierung

Format der Aufgabe

Ergebnisse ■ Wirksamkeit dieser vier Visualisierungen

BINDER, KRAUSS & BRUCKMAIER (2015)

100 %

Studienteilnehmer:

259 Schüler (Gymnasium 11. Klasse)

Aus dem Lehrplan (11. Klasse, Gymnasium)



STAATSINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT
UND BILDUNGSFORSCHUNG
MÜNCHEN

Die Schülerinnen und Schüler...

erläutern, dass in Sachzusammenhängen (z. B. in der medizinischen Diagnostik) klar zwischen $P_B(A)$, $P_A(B)$ und $P(A \cap B)$ unterschieden werden muss. Sie sind in der Lage, mithilfe von Vierfeldertafeln oder Baumdiagrammen – **auch solchen, in denen sie Wahrscheinlichkeiten mithilfe von absoluten Häufigkeiten in den Feldern bzw. Knoten illustrieren** – von der einen auf die andere bedingte Wahrscheinlichkeit zu schließen.

Bildungsstandards für den ESA und MSA (2022)

In den 2022 von der KMK veröffentlichten neuen **Bildungsstandards für Mathematik für die Sekundarstufe I**, wird das Thema „bedingte Wahrscheinlichkeiten“ für den Mittleren Schulabschluss (nach Klasse 10) festgelegt.

- nutzen Visualisierungen, um bei einfachen, alltagsnahen Modellierungen bedingte Wahrscheinlichkeiten zu erkennen, ohne und mit Hilfe digitaler Medien.



**KULTUSMINISTER
KONFERENZ**

Das Thema „bedingte Wahrscheinlichkeit“ ist also in Zukunft nicht mehr länger ein gymnasiales Thema!

Und in der Grundschule?

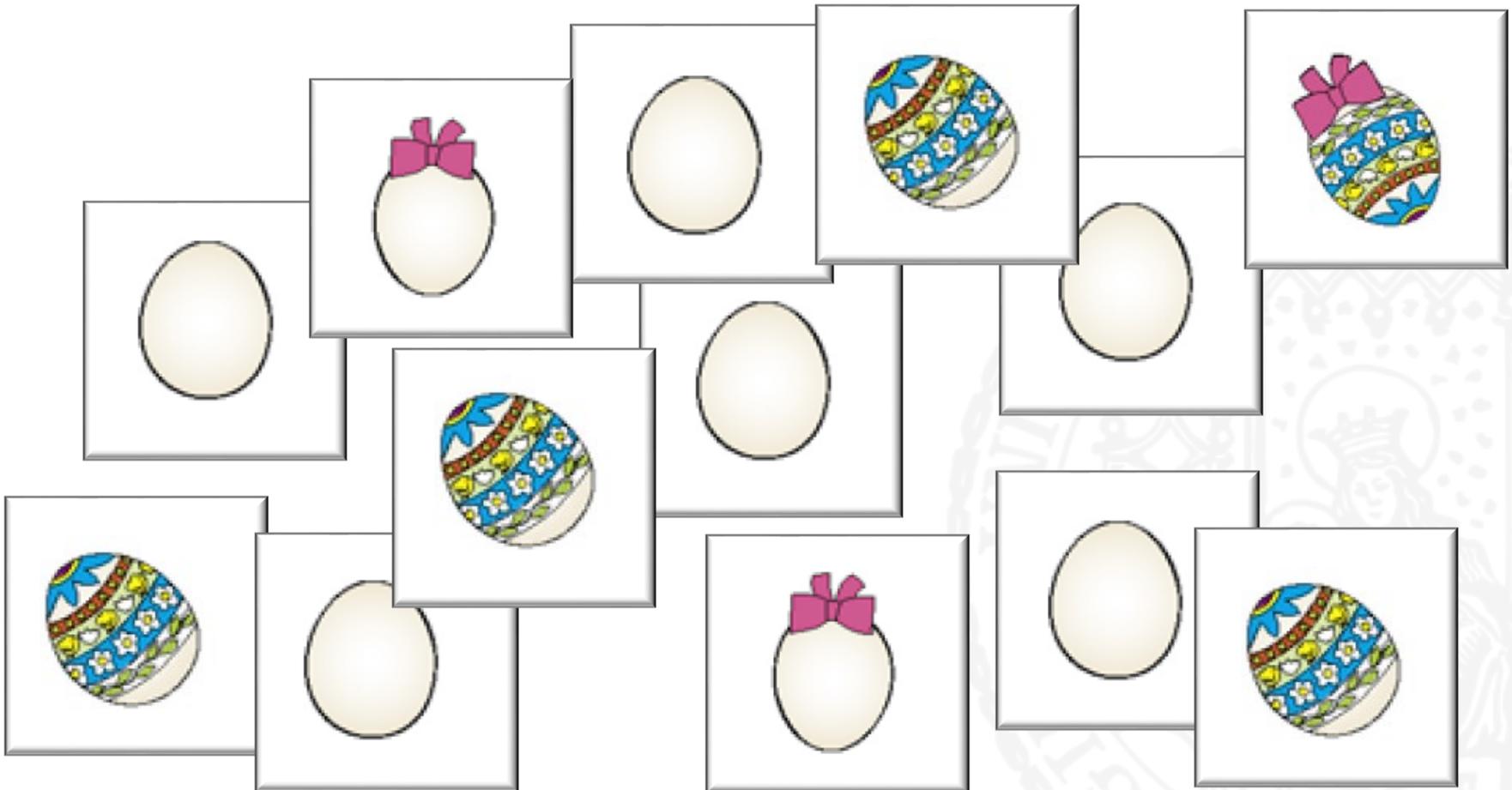
ZHU & GIGERENZER (2006),
GIGERENZER ET AL. (2021),
MARTIGNON & KRAUSS (2009)
BINDER UND WILD (2019)



Und in der Grundschule?

Sortieren

→ Arbeiten mit Bildkärtchen

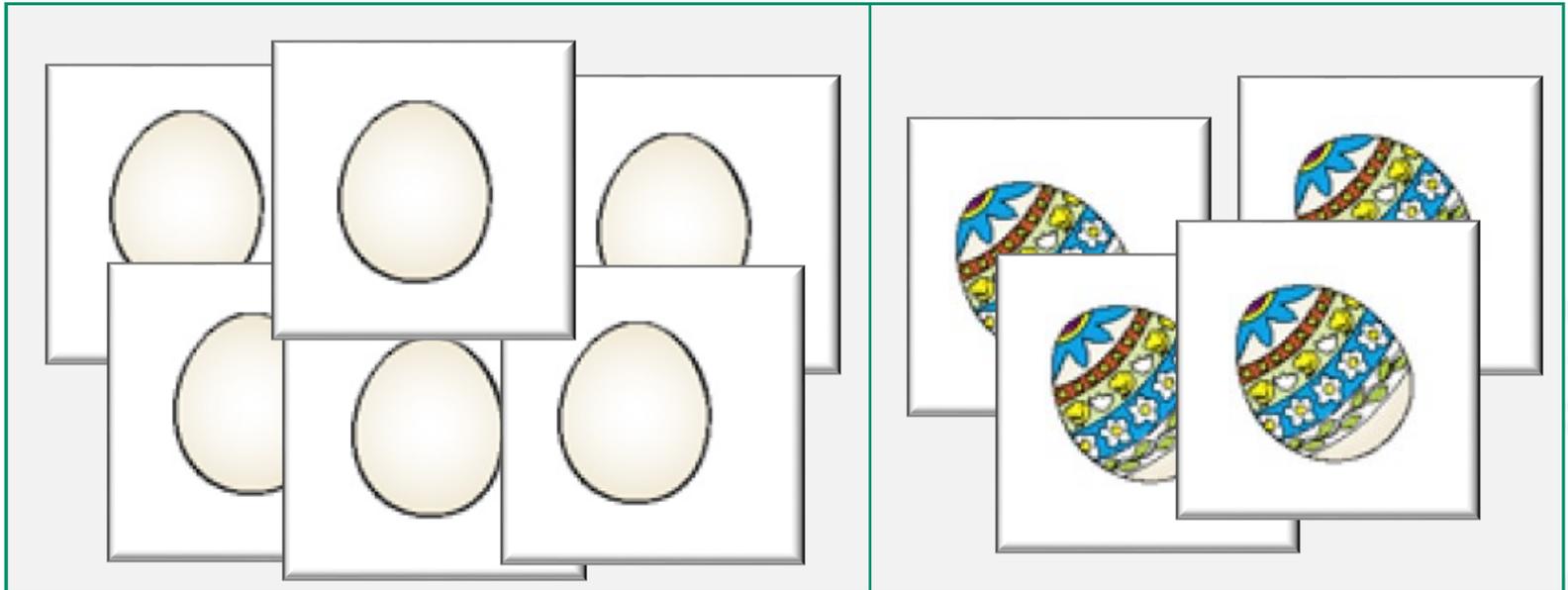


Bildkärtchen in Vierfeldertafel sortieren (Binder & Vogel, 2018)

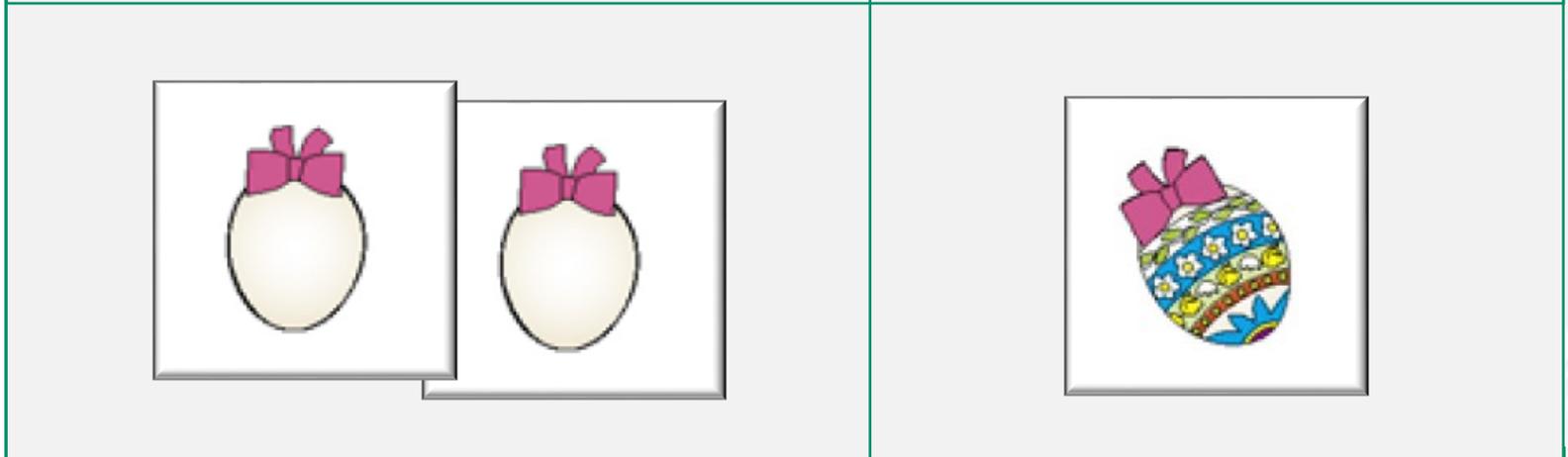
Nicht bemalt

Bemalt

Ohne Schleife

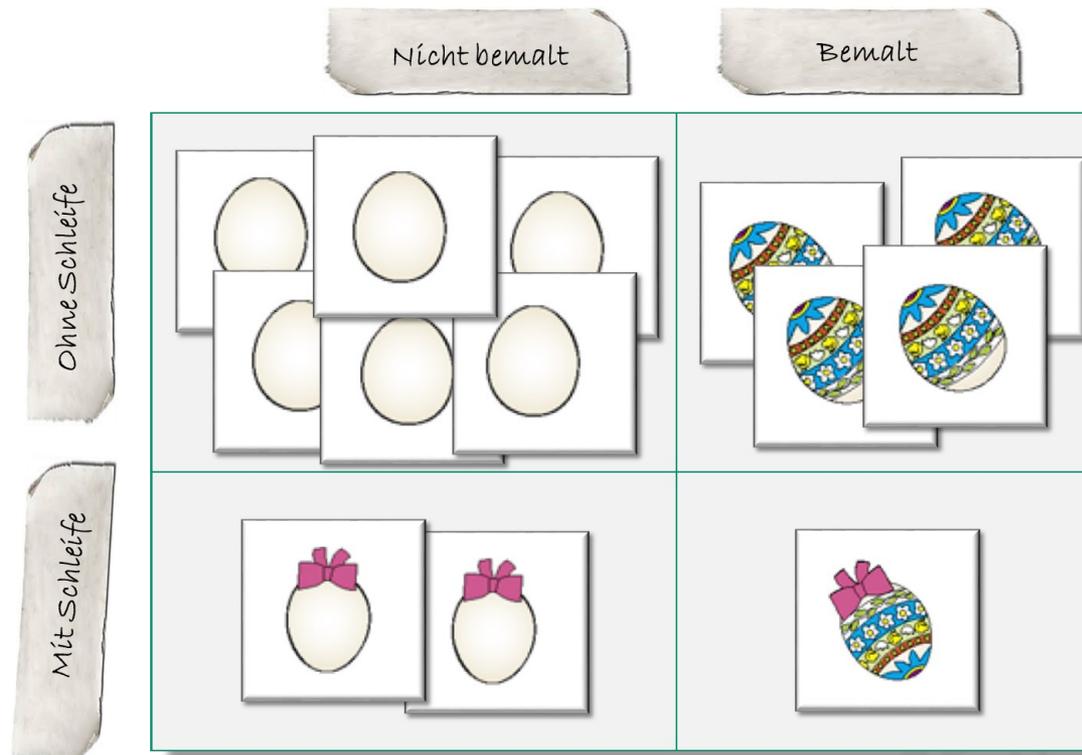


Mit Schleife

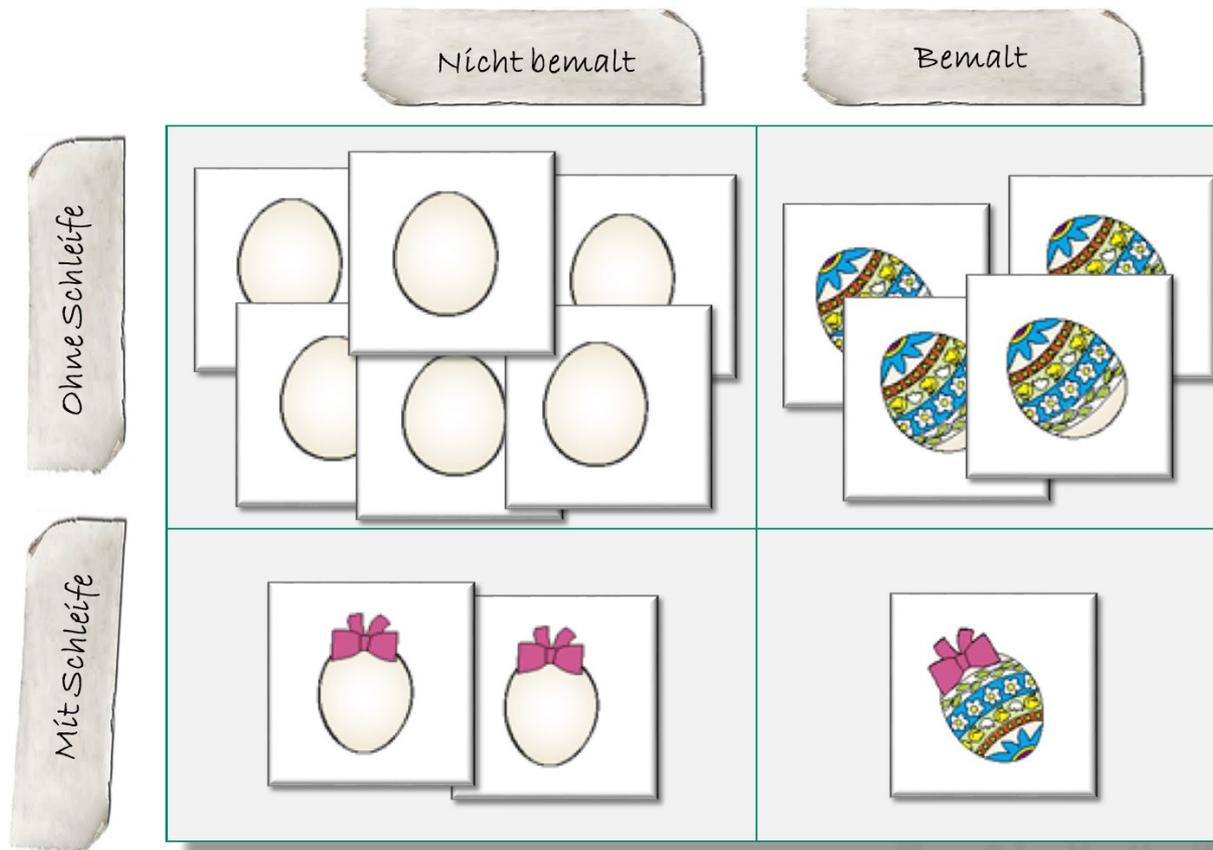


Wichtige Erkenntnis: Erkennen der Struktur!

Es gibt **zwei Merkmale** (Schleife und Bemalung) mit je **zwei Ausprägungen** (mit Schleife vs. ohne Schleife; bemalt vs. nicht bemalt)



Und in der Grundschule?

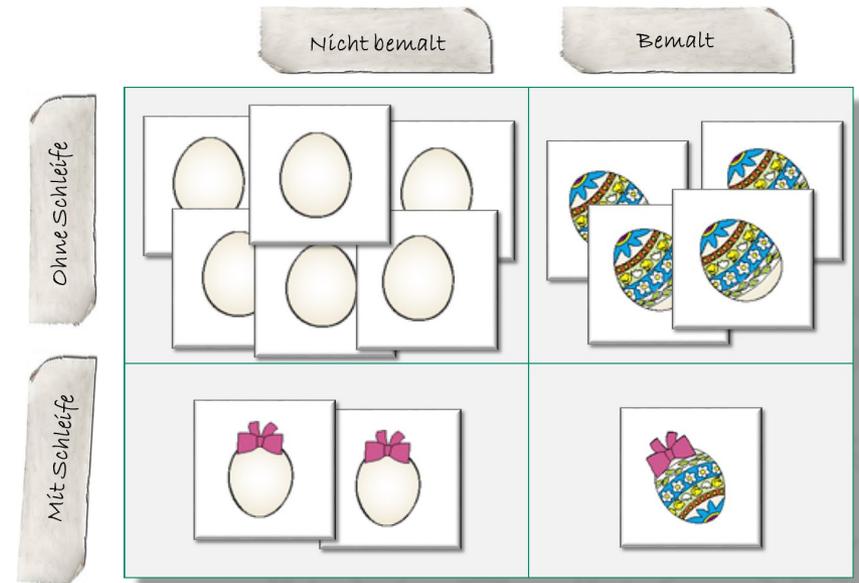


Stell dir vor, du nimmst mit geschlossenen Augen ein Ei mit einer Schleife...
Würdest du eher darauf wetten, dass es bemalt ist oder dass es nicht bemalt ist?

Und in der Grundschule?

Stell dir vor, du nimmst mit geschlossenen Augen ein Ei mit einer Schleife... Würdest du eher darauf wetten, dass es bemalt ist oder dass es nicht bemalt ist?

Sprachliche Hilfestellung (Obermenge verdeutlichen):

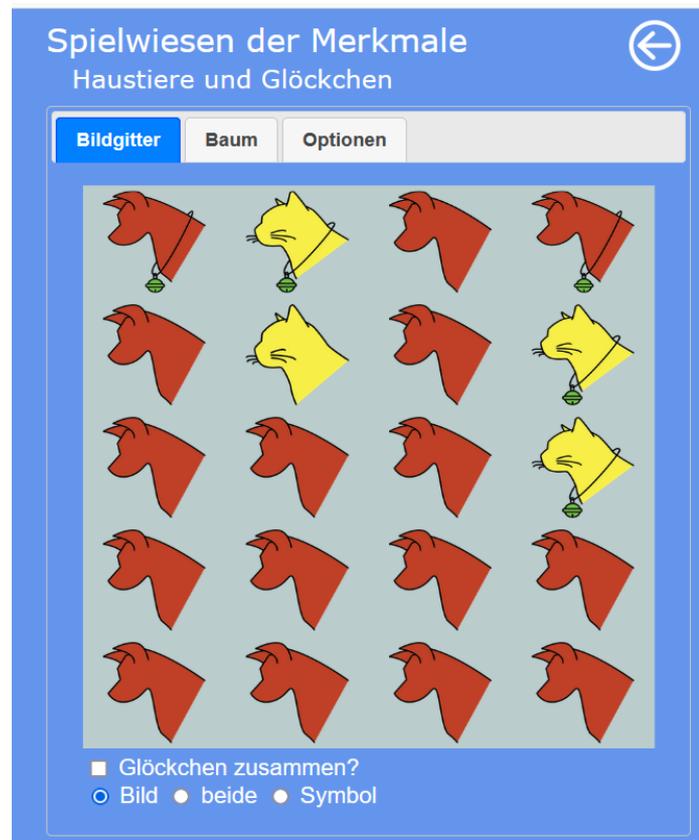


Schau dir die **Eier mit Schleife** genauer an. Gibt es darunter mehr die bemalt sind oder mehr solche, die nicht bemalt sind?

Und in der Grundschule? Computergestützt

Martignon & Hoffrage (2019) „Wer wagt, gewinnt“

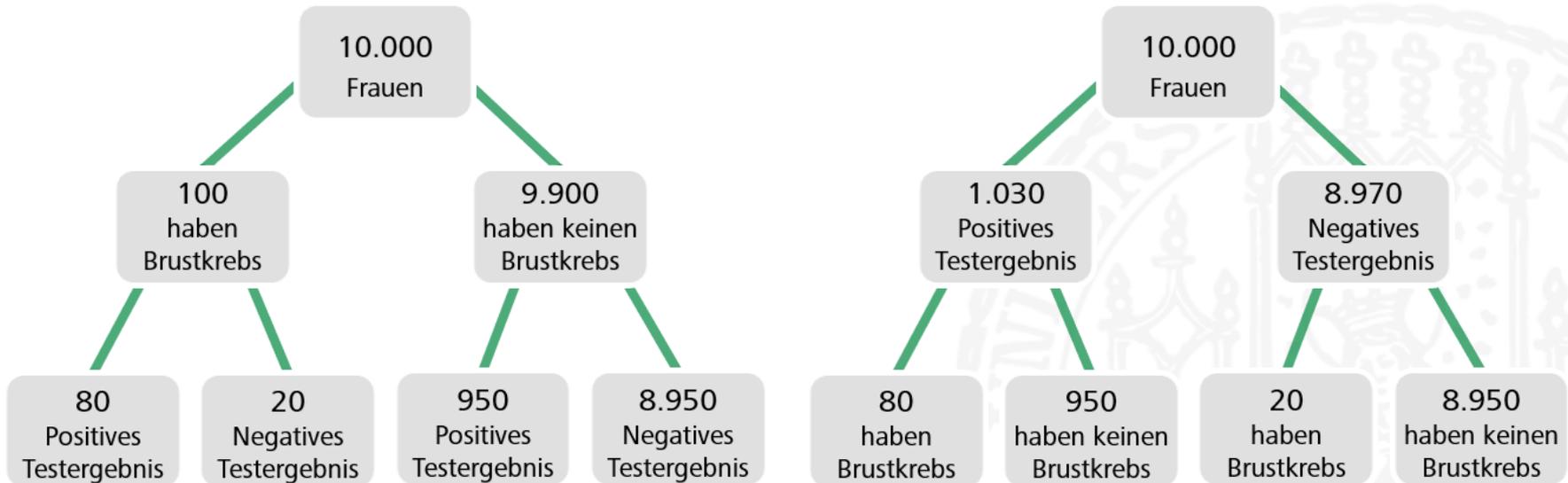
<http://www.eeps.com/projects/wwg/risk/risk.html?contexts=bc,mp,sida&lang=de>



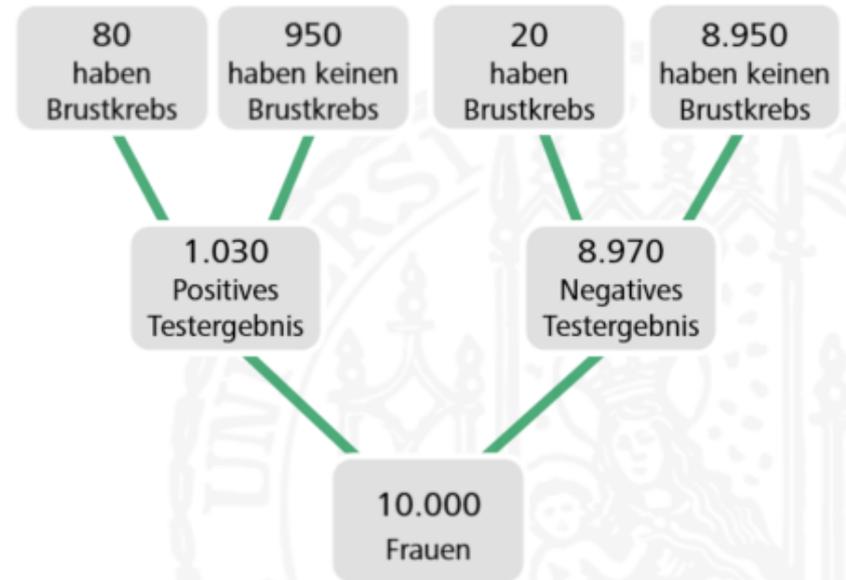
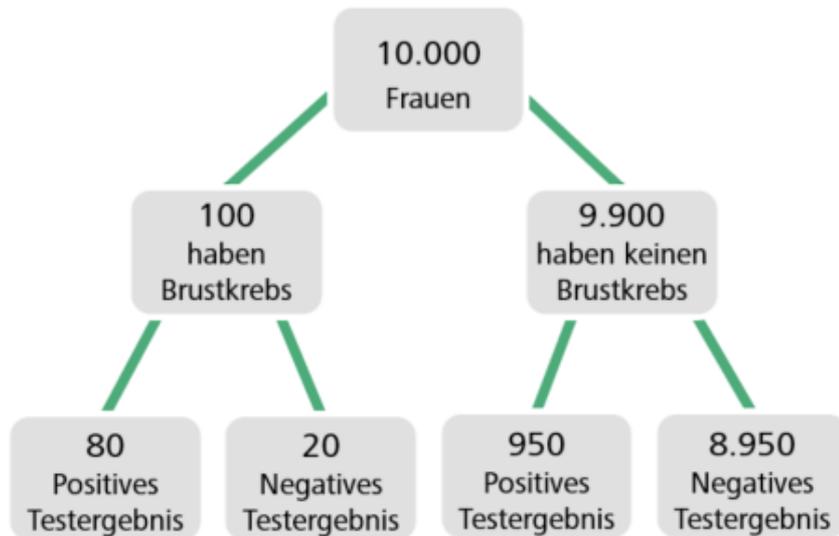
Zurück zu Bäumen und Vierfeldertafeln



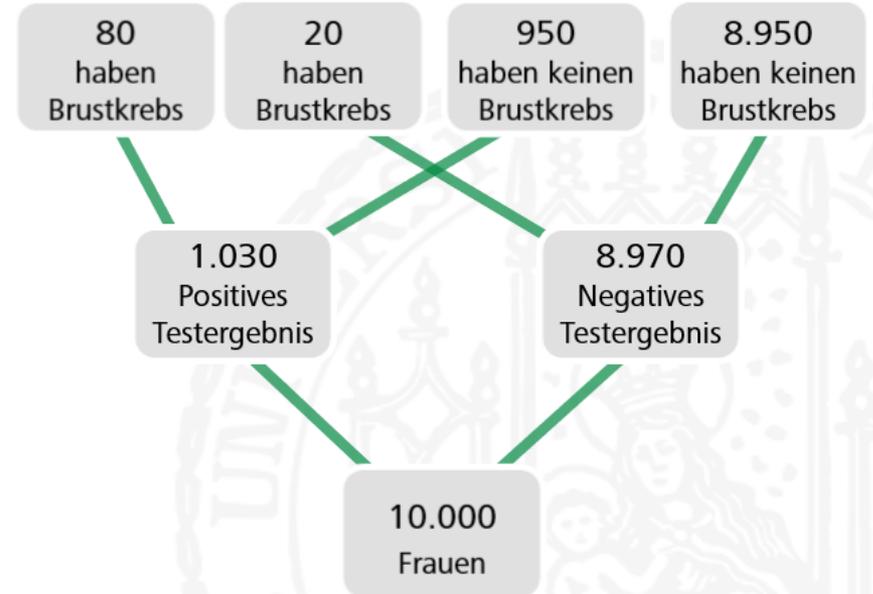
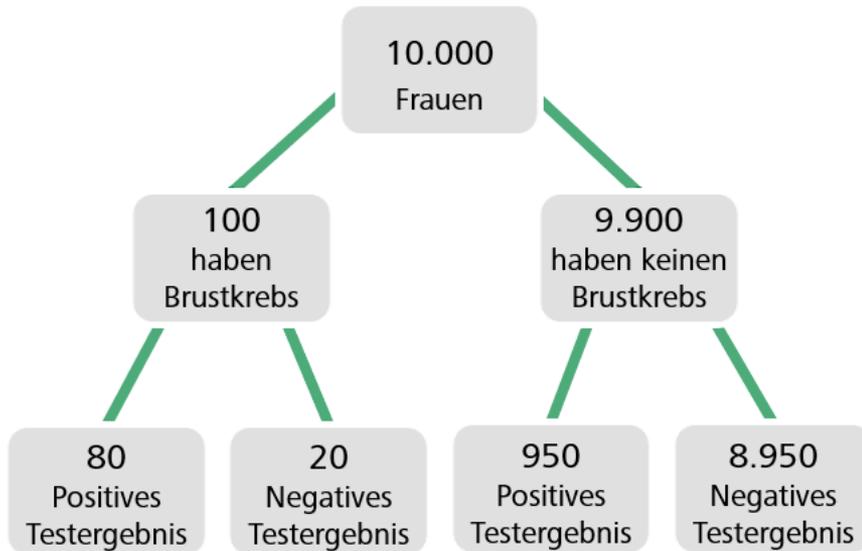
Vom Häufigkeitsbaum zum Häufigkeitsdoppelbaum



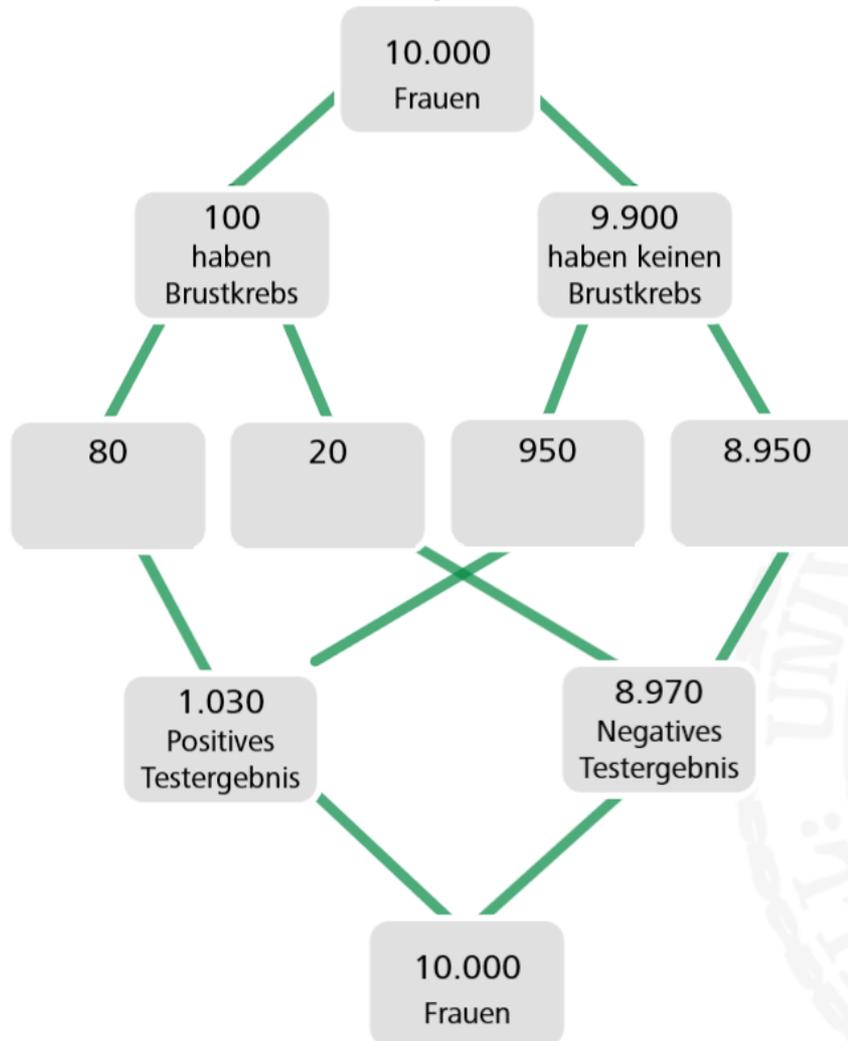
Vom Häufigkeitsbaum zum Häufigkeitsdoppelbaum



Vom Häufigkeitsbaum zum Häufigkeitsdoppelbaum



Vom Häufigkeitsbaum zum Häufigkeitsdoppelbaum





Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel

	Brustkrebs	Kein Brustkrebs	
Test positiv	1,6%	9,8%	11,4%
Test negativ	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%

✓ Vier Randwahrscheinlichkeiten:

$P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(T+)$, $P(T-)$

✓ Vier Schnittwahrscheinlichkeiten:

$P(B \cap T+)$, $P(\bar{B} \cap T+)$,
 $P(B \cap T-)$, $P(\bar{B} \cap T-)$

Acht bedingte
Wahrscheinlichkeiten:

$P(B|T+)$, $P(\bar{B}|T+)$,
 $P(B|T-)$, $P(\bar{B}|T-)$,
 $P(T+|B)$, $P(T-|B)$,
 $P(T+|\bar{B})$, $P(T-|\bar{B})$



Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel

	Brustkrebs	Kein Brustkrebs	
Test positiv	1,6%	9,8%	11,4%
Test negativ	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%
			14%

Marginal probabilities for Test: 80% (positive), 20% (negative)
 Marginal probabilities for Disease: 14% (Breast Cancer), 86% (No Breast Cancer)

Vier Randwahrscheinlichkeiten:

$P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(T+)$, $P(T-)$

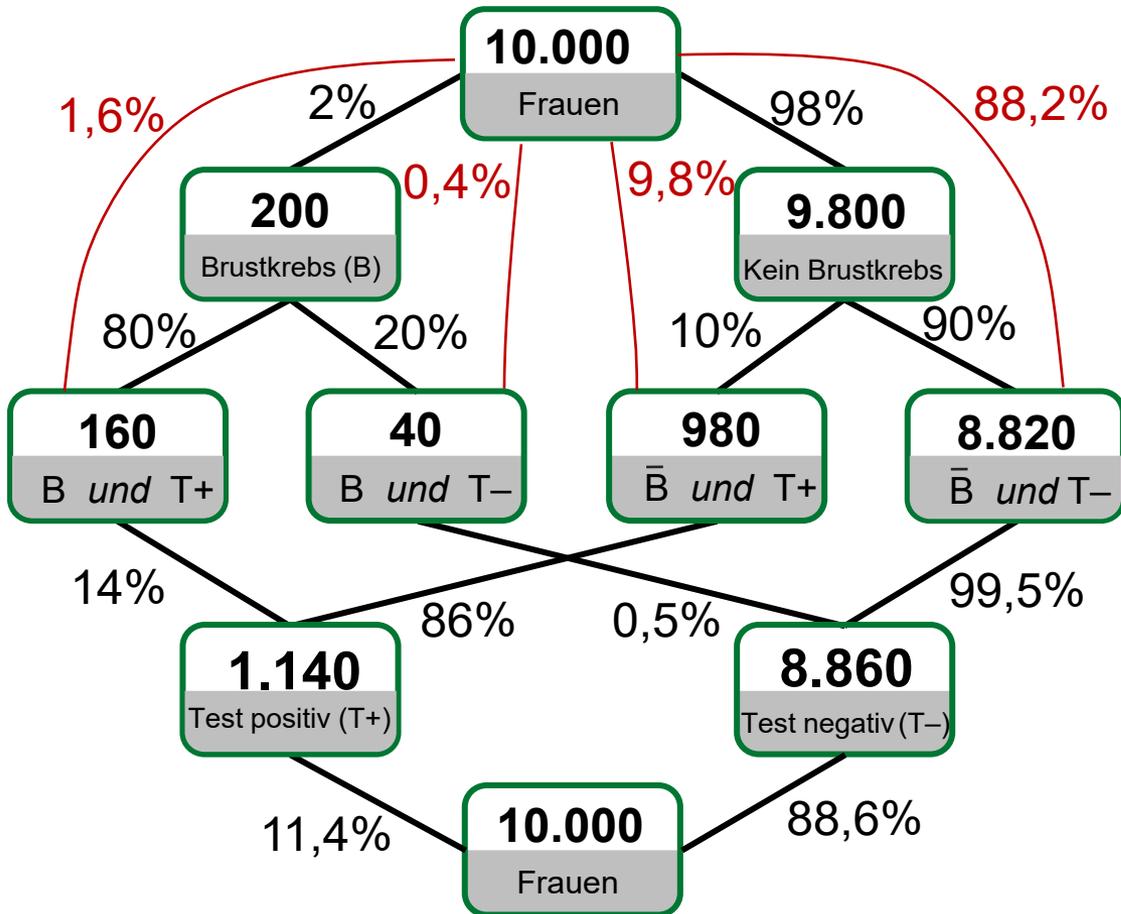
Vier Schnittwahrscheinlichkeiten:

$P(B \cap T+)$, $P(\bar{B} \cap T+)$,
 $P(B \cap T-)$, $P(\bar{B} \cap T-)$

**Acht bedingte
Wahrscheinlichkeiten:**

$P_{T+}(B)$, $P_{T+}(\bar{B})$,
 $P_{T-}(B)$, $P_{T-}(\bar{B})$,
 $P_B(T+)$, $P_B(T-)$,
 $P_{\bar{B}}(T+)$, $P_{\bar{B}}(T-)$

Wahrscheinlichkeiten im Doppelbaum (WASSNER, 2004; MARTIGNON & KUNTZE, 2015)

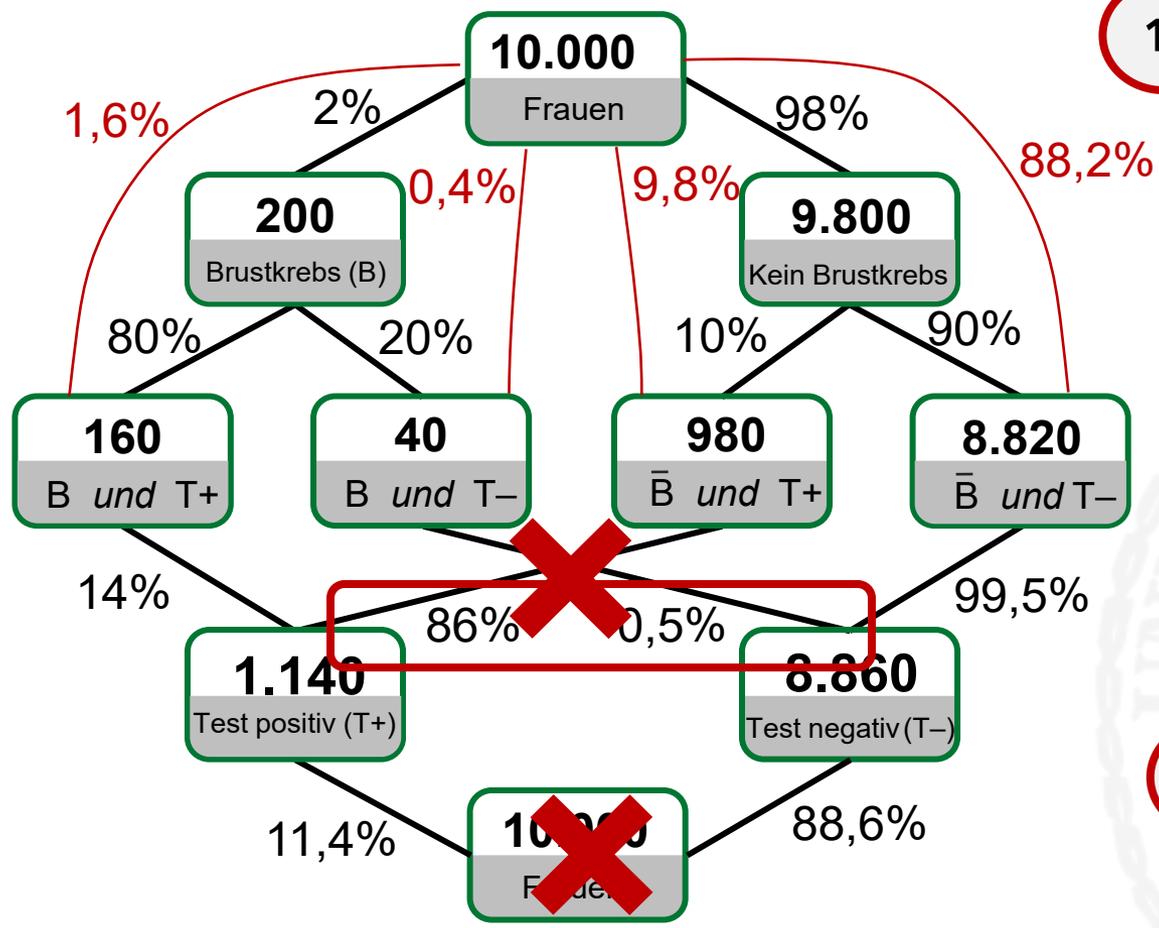


✓ **Vier Randwahrscheinlichkeiten:**
 $P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(T+)$, $P(T-)$

✗ **Vier Schnittwahrscheinlichkeiten:**
 $P(B \cap T+)$, $P(\bar{B} \cap T+)$,
 $P(B \cap T-)$, $P(\bar{B} \cap T-)$

✓ **Acht bedingte Wahrscheinlichkeiten:**
 $P_{T+}(B)$, $P_{T+}(\bar{B})$,
 $P_{T-}(B)$, $P_{T-}(\bar{B})$,
 $P_B(T+)$, $P_B(T-)$,
 $P_{\bar{B}}(T+)$, $P_{\bar{B}}(T-)$

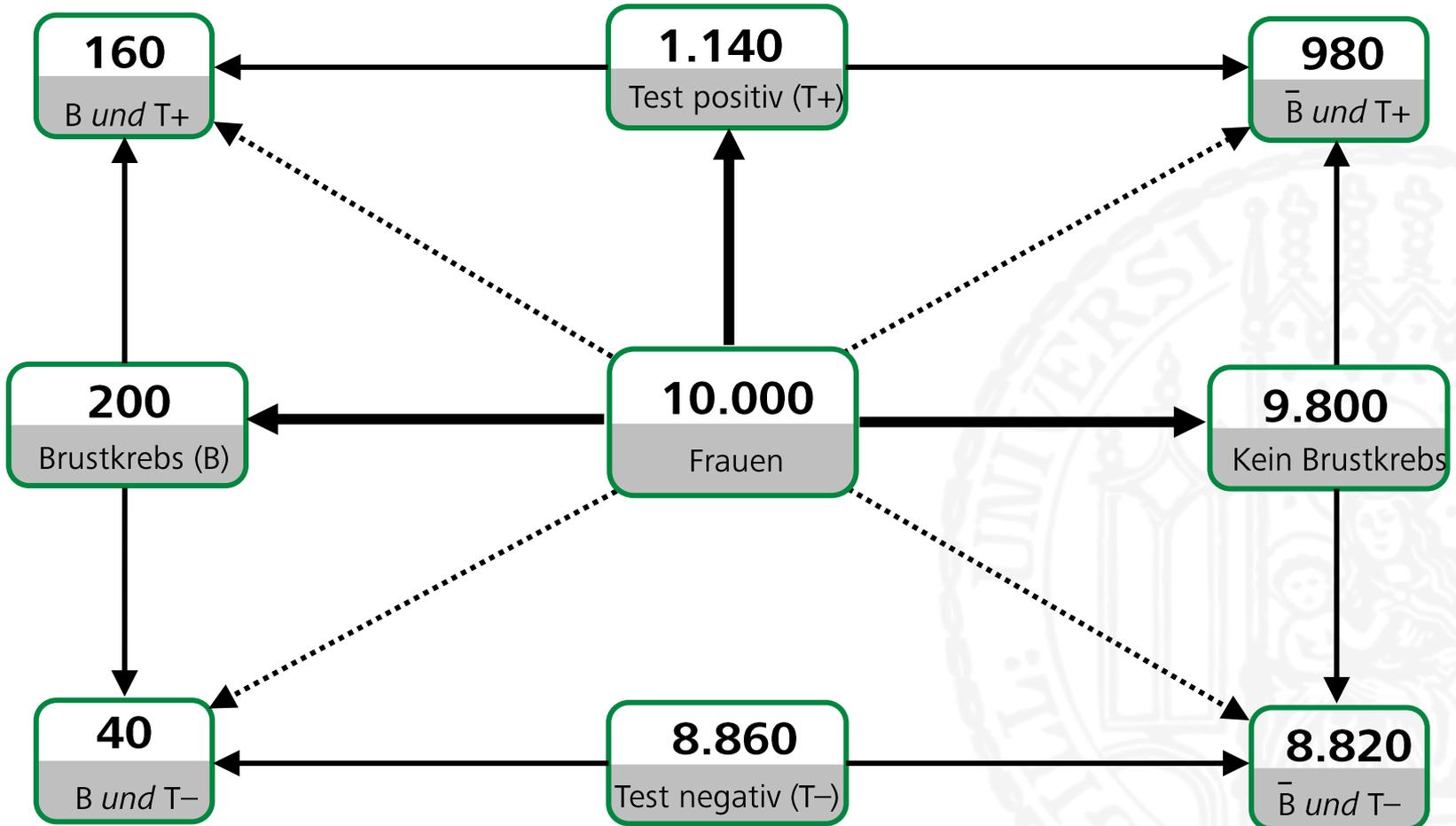
Drei Nachteile des Doppelbaums

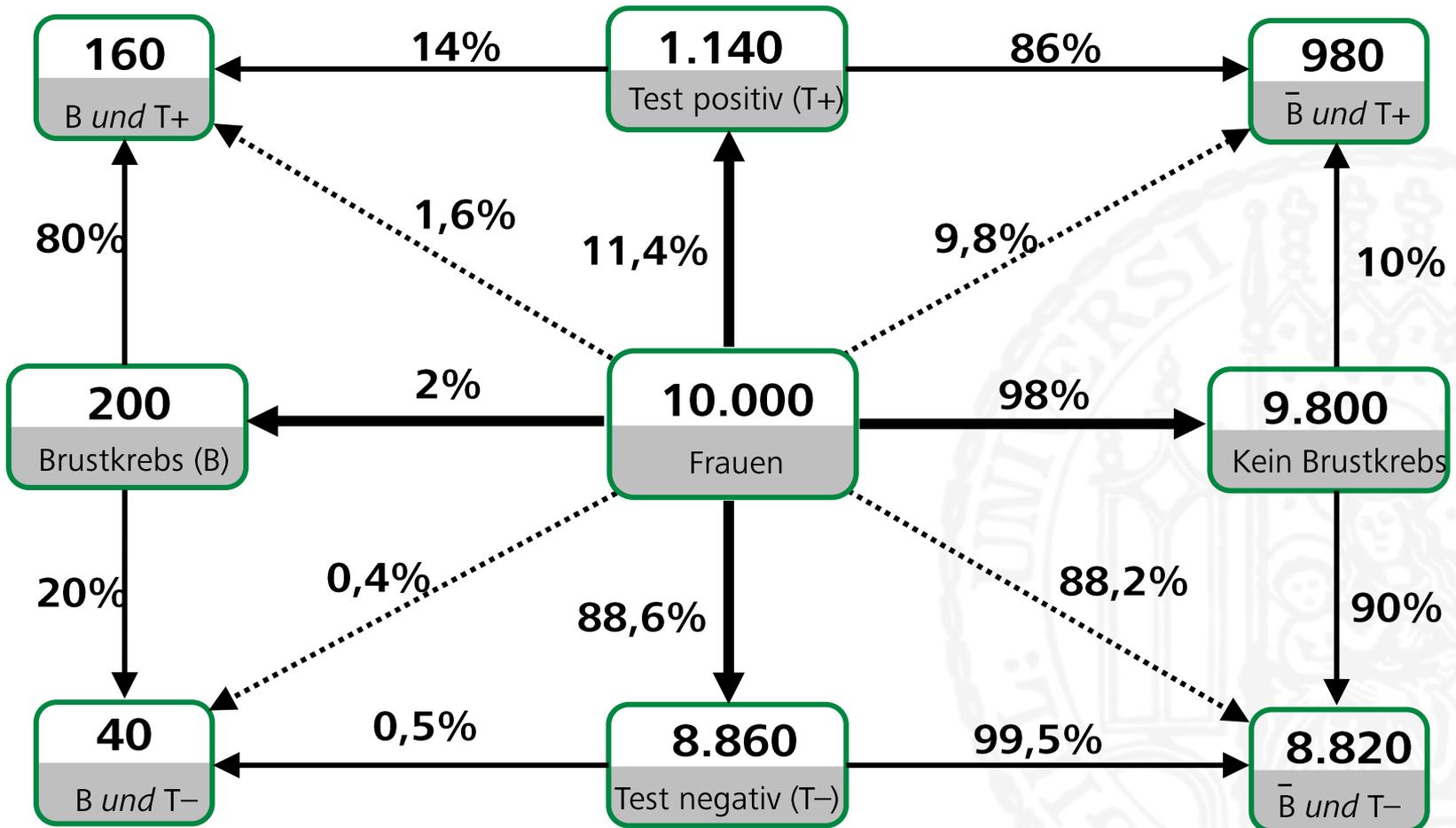


1. Es gibt keine Äste für die Schnittwahrscheinlichkeiten

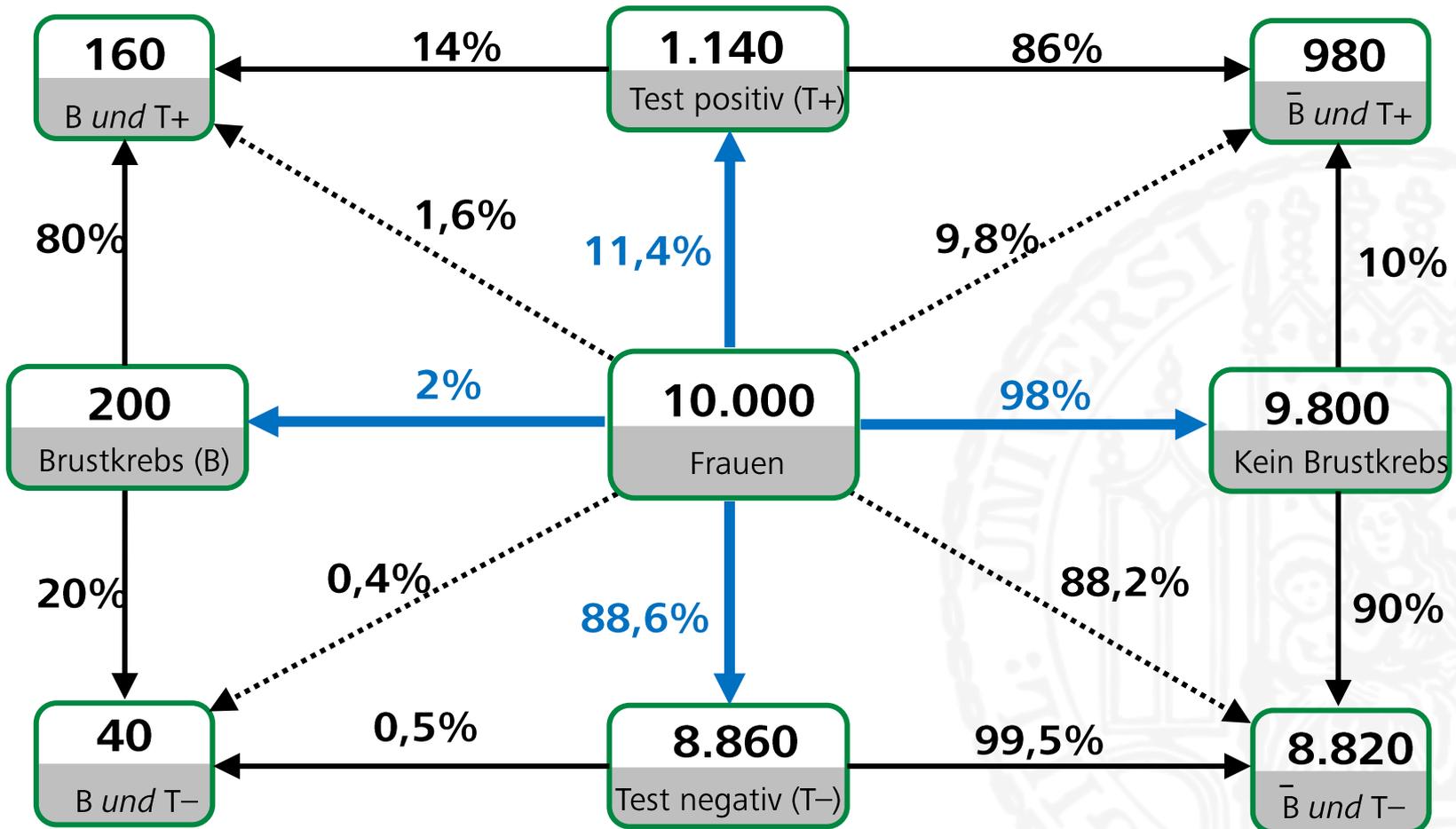
2. Zwei Äste überschneiden sich

3. Ein Knoten kommt doppelt vor

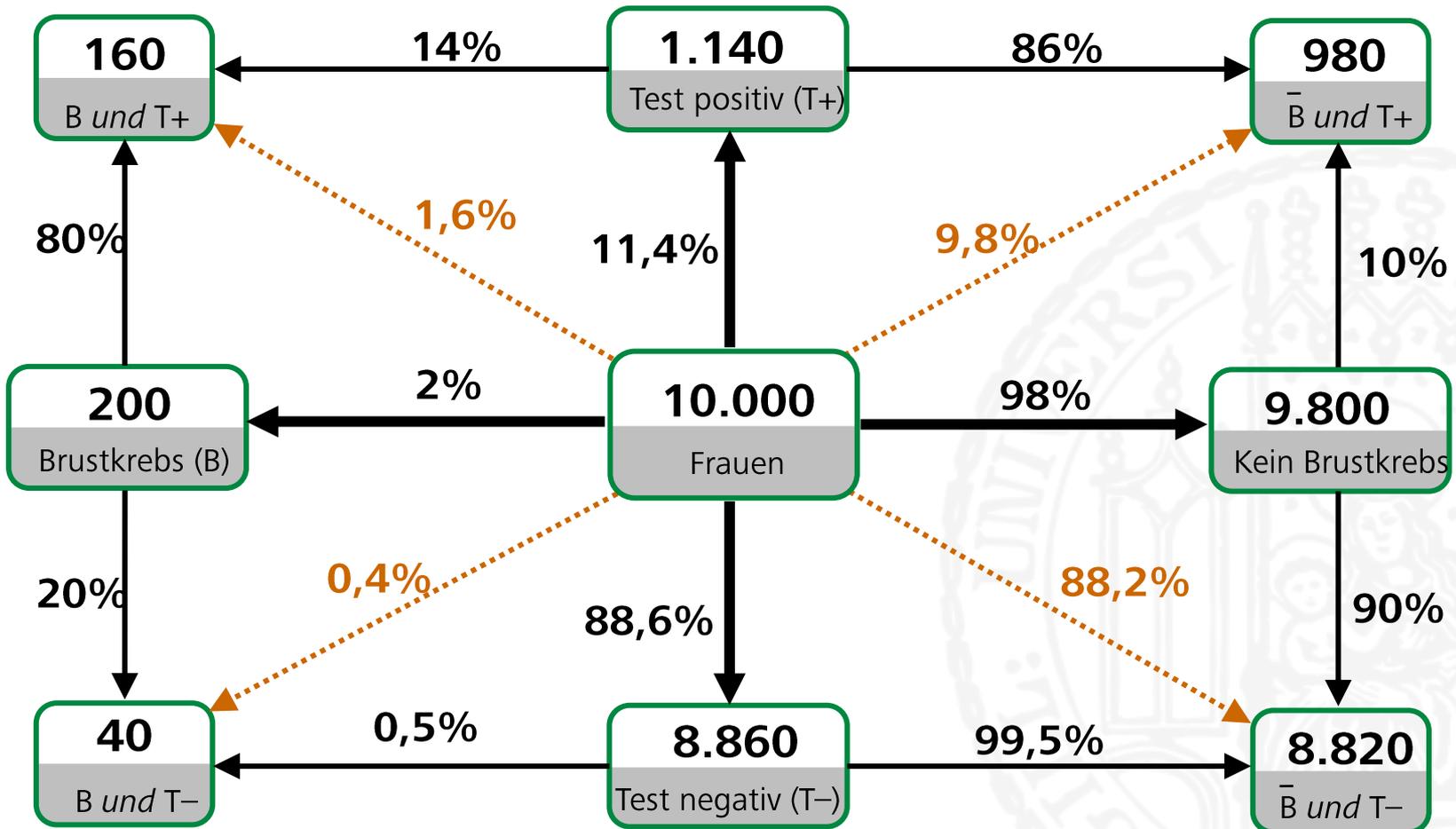




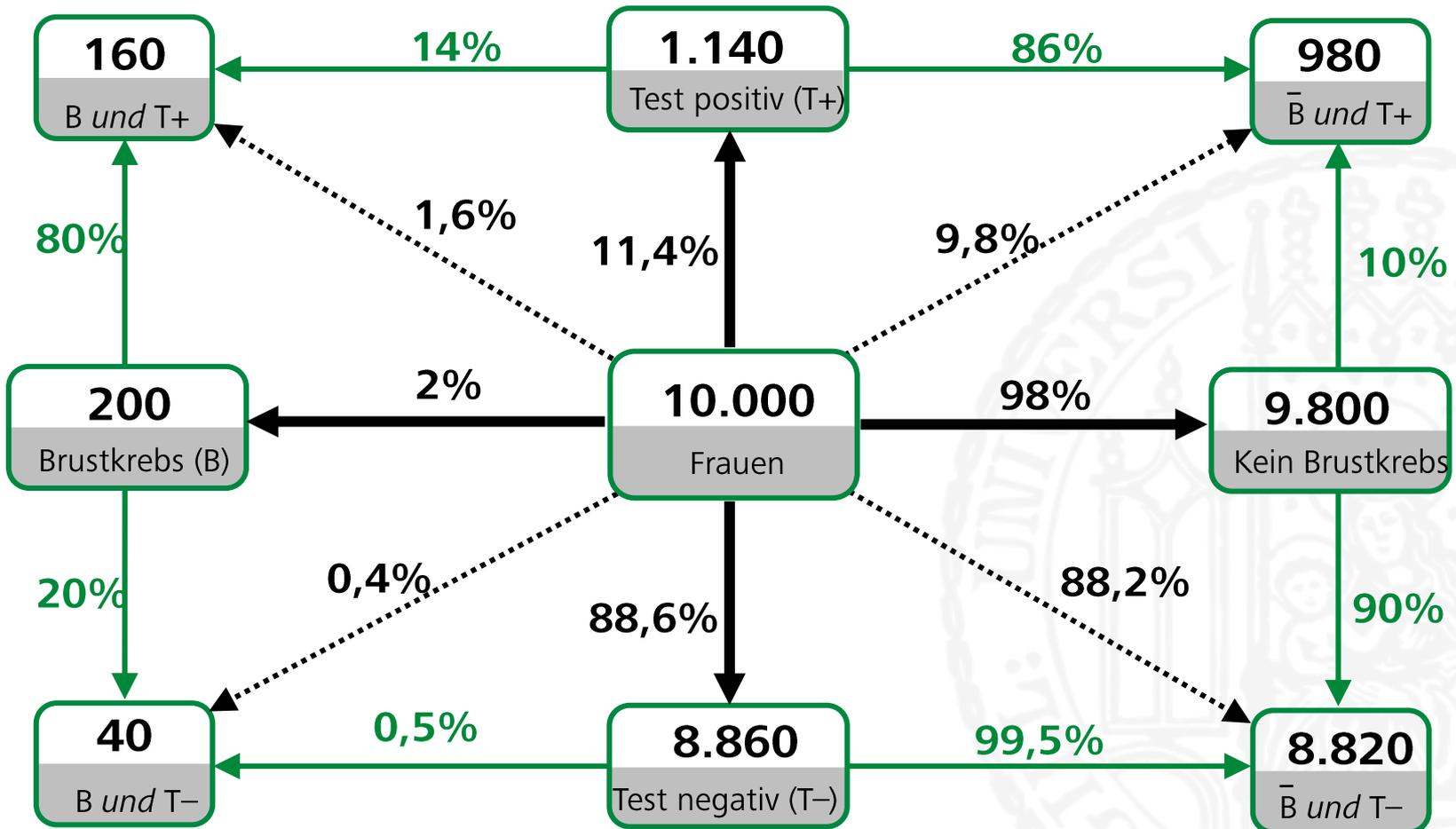
Vier Randwahrscheinlichkeiten



Vier Schnittwahrscheinlichkeiten



Acht bedingte Wahrscheinlichkeiten



Überfordert das Netz die Schüler:innen?

BINDER ET AL. (2020)

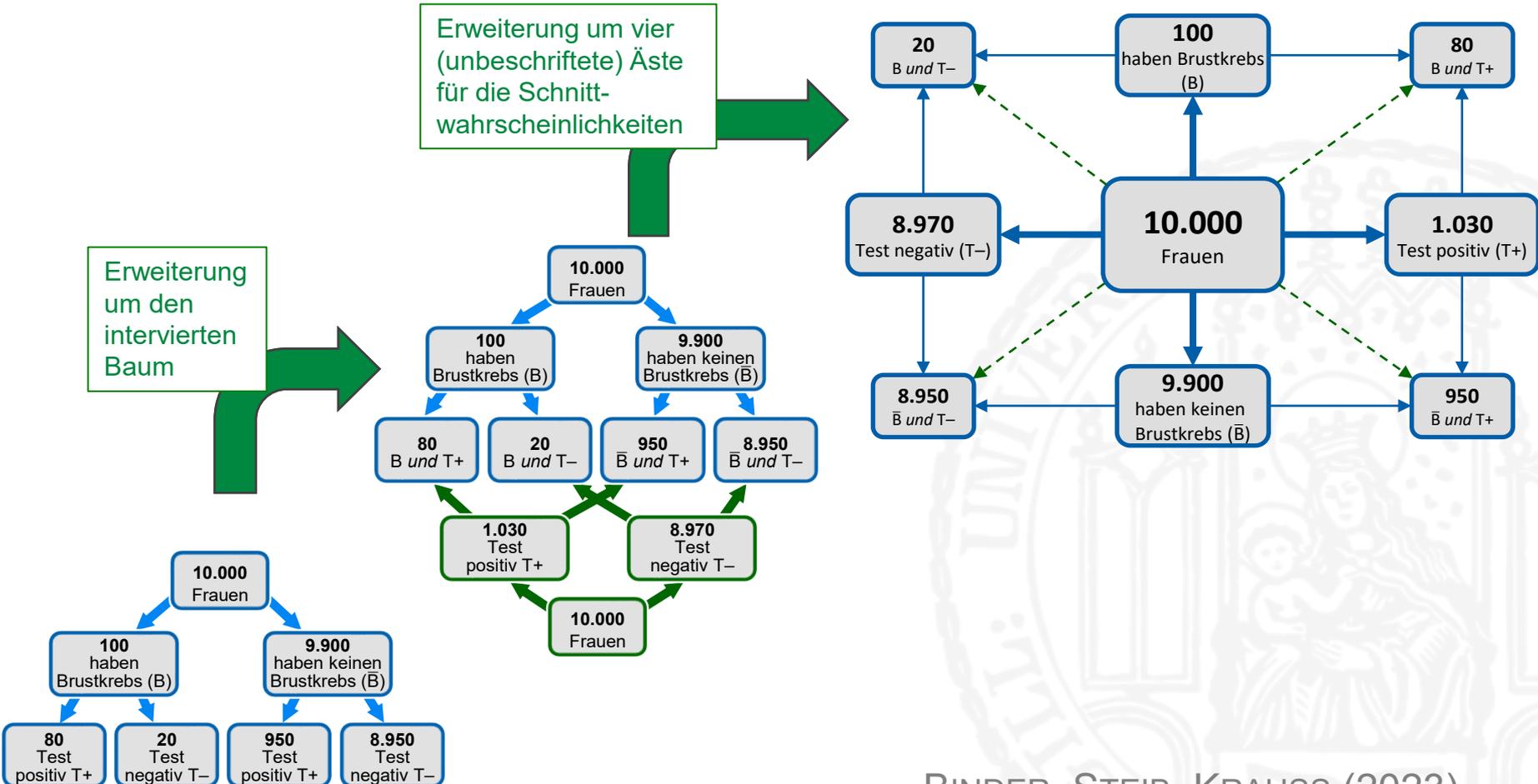
BINDER ET AL. (2023)



Sukzessive Erweiterung von Knoten-Ast-Strukturen

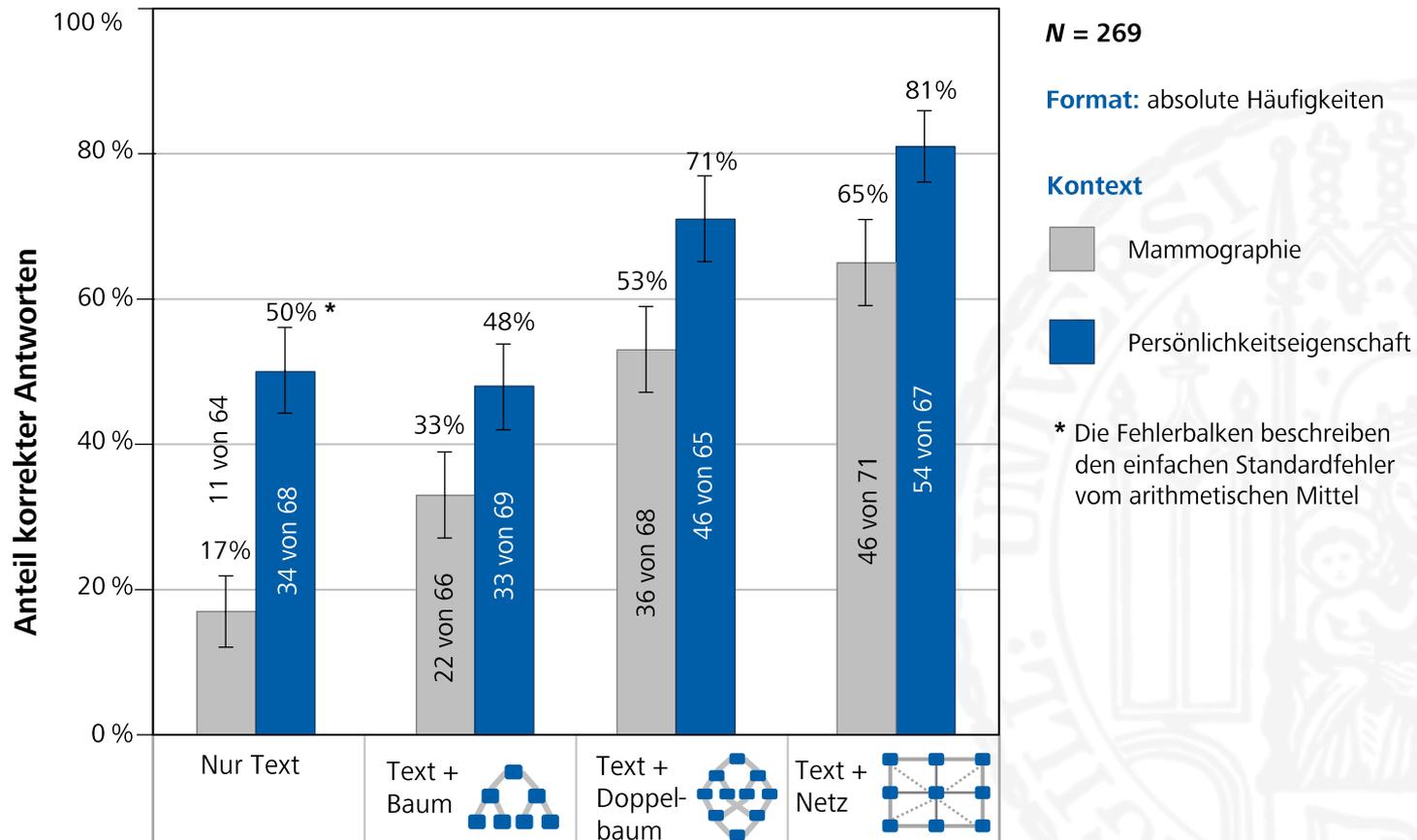
Erweiterung um vier
(unbeschriftete) Äste
für die Schnitt-
wahrscheinlichkeiten

Erweiterung
um den
intervierten
Baum



Sukzessive Erweiterung von Knoten-Ast-Strukturen

BINDER, STEIB, KRAUSS (2023)



Typische Fehler bei Bayesianischen Aufgaben

(Binder, Krauss & Wiesner, 2020)

frontiers
in Psychology

ORIGINAL RESEARCH
published: 20 May 2020
doi: 10.3389/fpsyg.2020.00762

A New Visualization for Probabilistic Situations Containing Two Binary Events: The Frequency Net

Karin Binder*, Stefan Krauss and Patrick Wiesner
Mathematics Education, Faculty of Mathematics, University of Regensburg, Regensburg, Germany

In teaching statistics in secondary schools and at university, two visualizations are primarily used when situations with two dichotomous characteristics are represented: 2×2 tables and tree diagrams. Both visualizations can be depicted either with probabilities or with frequencies. Visualizations with frequencies have been shown to help students significantly more in Bayesian reasoning problems than probability visualizations do. Because tree diagrams or double-trees (which are largely unknown in school) are node-branch structures, these two visualizations (in contrast to the 2×2 table) can even simultaneously display probabilities on branches and frequencies inside the nodes. This is a teaching advantage as it allows the frequency concept to be

OPEN ACCESS

Suche SUCHEN KONTAKT IMP

UR
Universität Regensburg

STARTSEITE UR

NEWSROOM
PRESSE
Mitteilung
Pressefotos
Dreh- und
Fotogenehmigungen
Expertenservice

FORSCHUNG AN DER UR
AUS DEM PRÄSIDIUM
MENSCHEN AN DER UR

Das Häufigkeitsnetz hilft Wahrscheinlichkeiten besser zu verstehen

Regensburger Mathematiker*innen entwickeln neue Wahrscheinlichkeitsvisualisierung

26. Mai 2020

Wer Statistiken korrekt verstehen will, dem können Visualisierungen helfen: In der Schule etwa, oder in der Medizin. Eine neue Wahrscheinlichkeitsvisualisierung, das sogenannte Häufigkeitsnetz, hat nun die Regensburger Mathematik-Didaktikerin Dr. Karin Binder, in diesem Sommersemester Vertretungsprofessorin an der

Node	Value	Percentage
1.300 C und T+	1.300	46.8%
2.780 010 Patienten Anträge bei	2.780	1.3%
1.480 C und T+	1.480	1.48%
1.300 waren bereits infiziert	1.300	98.5%
0	0	
97.220	97.220	
97	97	
98.700 waren noch nicht infiziert	98.700	
100.000 Personen	100.000	

Studie ■ Design

BINDER, KRAUSS & WIESNER (2020)

- Versuchspersonen: $N = 249$ Studierende der Universität Regensburg
- $4 \times 2 \times 2$ -Design (Visualisierung \times Informationsformat \times Kontext)
- Jede Versuchsperson arbeitete an **2 Aufgaben** zu zwei unterschiedlichen Kontexten (Mammographie und Persönlichkeitseigenschaft)
- Jede Versuchsperson beantwortete zu jeder der beiden Aufgaben zwei Fragen:

1. Frage: bedingte Wahrscheinlichkeit, **2. Frage:** Schnittwahrscheinlichkeit

Nr.	Informationsformat	Visualisierung	Kontext: Mammographie-Problem
1	Wahrscheinlichkeiten	Nur Text	
2		Vierfeldertafel	
3		Doppelbaum	
4		Netz	
5	Häufigkeiten	Nur Text	
6		Vierfeldertafel	
7		Doppelbaum	
8		Netz	

Nr.	Informationsformat	Visualisierung	Kontext: Persönlichkeitseigenschaft
9	Wahrscheinlichkeiten	Nur Text	
10		Vierfeldertafel	
11		Doppelbaum	
12		Netz	
13	Häufigkeiten	Nur Text	
14		Vierfeldertafel	
15		Doppelbaum	
16		Netz	

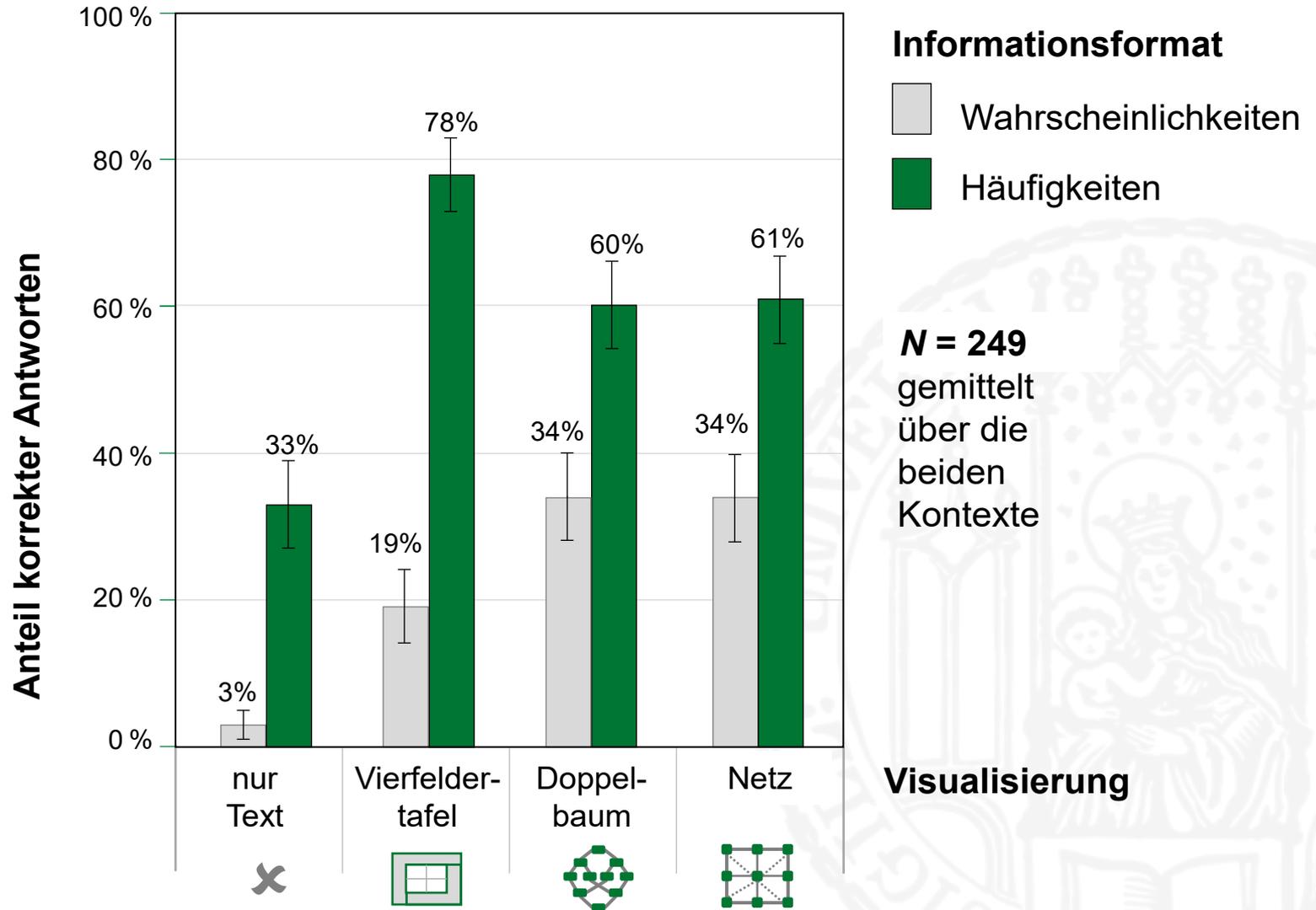
Studie ■ Eingesetzte Versionen

BINDER, KRAUSS & WIESNER (2020)

	Bayesianischer Text	Vierfeldertafel	Doppelbaum	Netz																
Wahrscheinlichkeiten	<p>Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt 2%. Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält 80%. Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält 10%.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Brustkrebs (B)</th> <th>Kein Brustkrebs (nB)</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Test positiv (T+)</td> <td>1,6%</td> <td>9,8%</td> <td>11,4%</td> </tr> <tr> <td>Test negativ (T-)</td> <td>0,4%</td> <td>88,2%</td> <td>88,6%</td> </tr> <tr> <td></td> <td>2%</td> <td>98%</td> <td>100%</td> </tr> </tbody> </table>		Brustkrebs (B)	Kein Brustkrebs (nB)		Test positiv (T+)	1,6%	9,8%	11,4%	Test negativ (T-)	0,4%	88,2%	88,6%		2%	98%	100%		
	Brustkrebs (B)	Kein Brustkrebs (nB)																		
Test positiv (T+)	1,6%	9,8%	11,4%																	
Test negativ (T-)	0,4%	88,2%	88,6%																	
	2%	98%	100%																	
Häufigkeiten	<p>200 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs. 160 von 200 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis. 980 von 9.800 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Brustkrebs (B)</th> <th>Kein Brustkrebs (nB)</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Test positiv (T+)</td> <td>160</td> <td>980</td> <td>1.140</td> </tr> <tr> <td>Test negativ (T-)</td> <td>40</td> <td>8.820</td> <td>8.860</td> </tr> <tr> <td></td> <td>200</td> <td>9.800</td> <td>10.000</td> </tr> </tbody> </table>		Brustkrebs (B)	Kein Brustkrebs (nB)		Test positiv (T+)	160	980	1.140	Test negativ (T-)	40	8.820	8.860		200	9.800	10.000		
	Brustkrebs (B)	Kein Brustkrebs (nB)																		
Test positiv (T+)	160	980	1.140																	
Test negativ (T-)	40	8.820	8.860																	
	200	9.800	10.000																	

Studie ■ Ergebnisse (bed. W.)

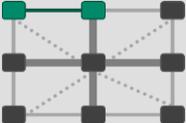
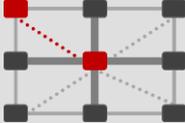
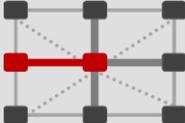
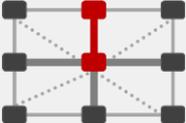
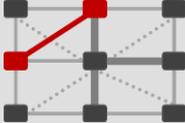
BINDER, KRAUSS & WIESNER (2020)



Typische Fehler

BINDER, KRAUSS & WIESNER (2020)

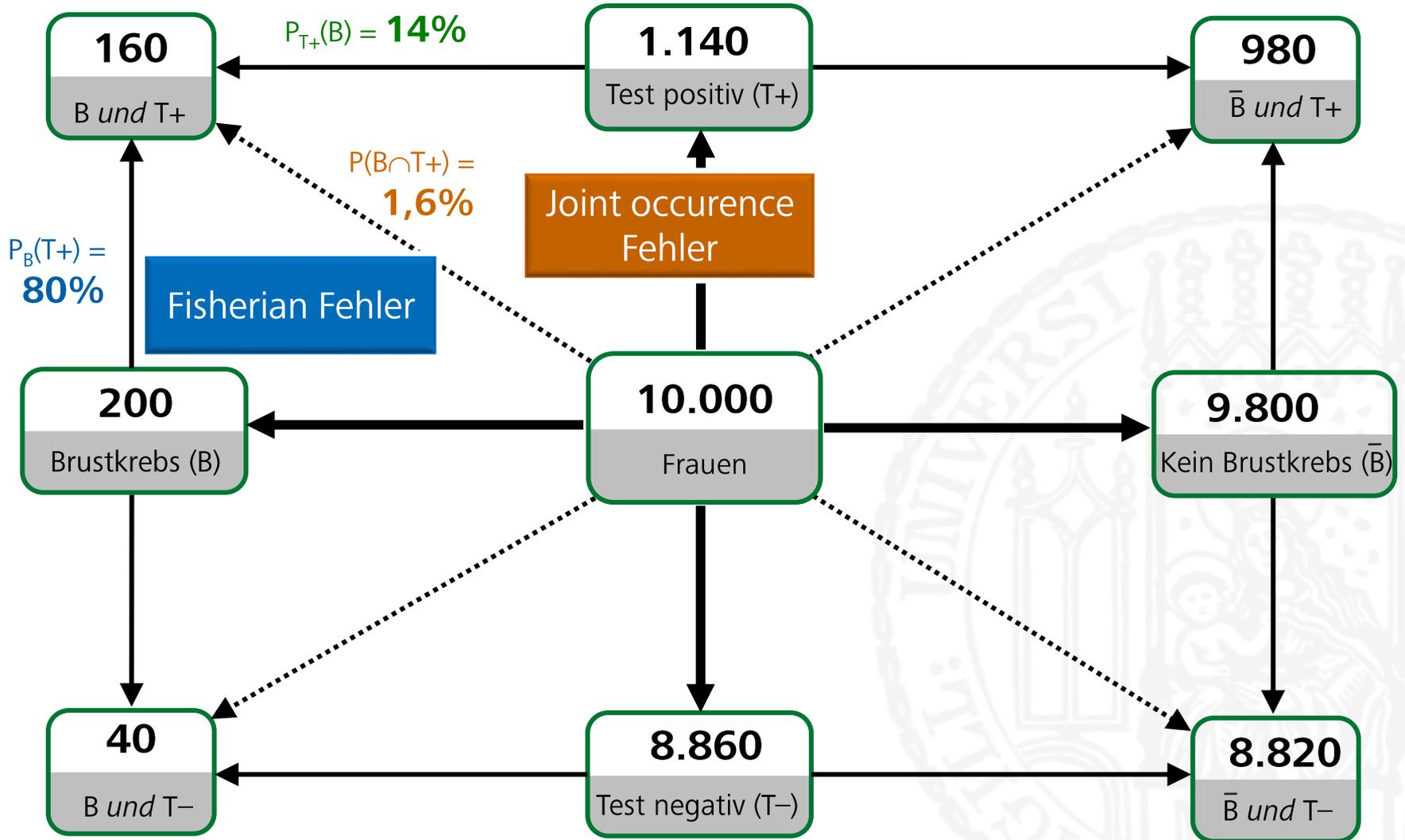
(GIGERENZER & HOFFRAGE, 1995; ZHU & GIGERENZER, 2006; DÍAS & BATANERO, 2009; STECKELBERG ET AL., 2004; BRUCKMAIER ET AL., 2019; EICHLER ET AL., 2020)

	Wahrscheinlichkeit	Im Häufigkeitsnetz...
Richtige Antwort (Bayes)	$P_{T+}(B)$	
Typische Fehler		
Joint occurrence (Verwechslung mit der Schnittwahrscheinlichkeit)	$P(B \cap T+)$	
Fisherian/Representative thinking (Verwechslung mit der invertierten bedingten Wahrscheinlichkeit)	$P_B(T+)$	
Basisrate/Conservatism	$P(B)$	
Evidence only	$P(T+)$	
Pre-Bayes	$ B $ von $ T+ $	

Das Häufigkeitsnetz

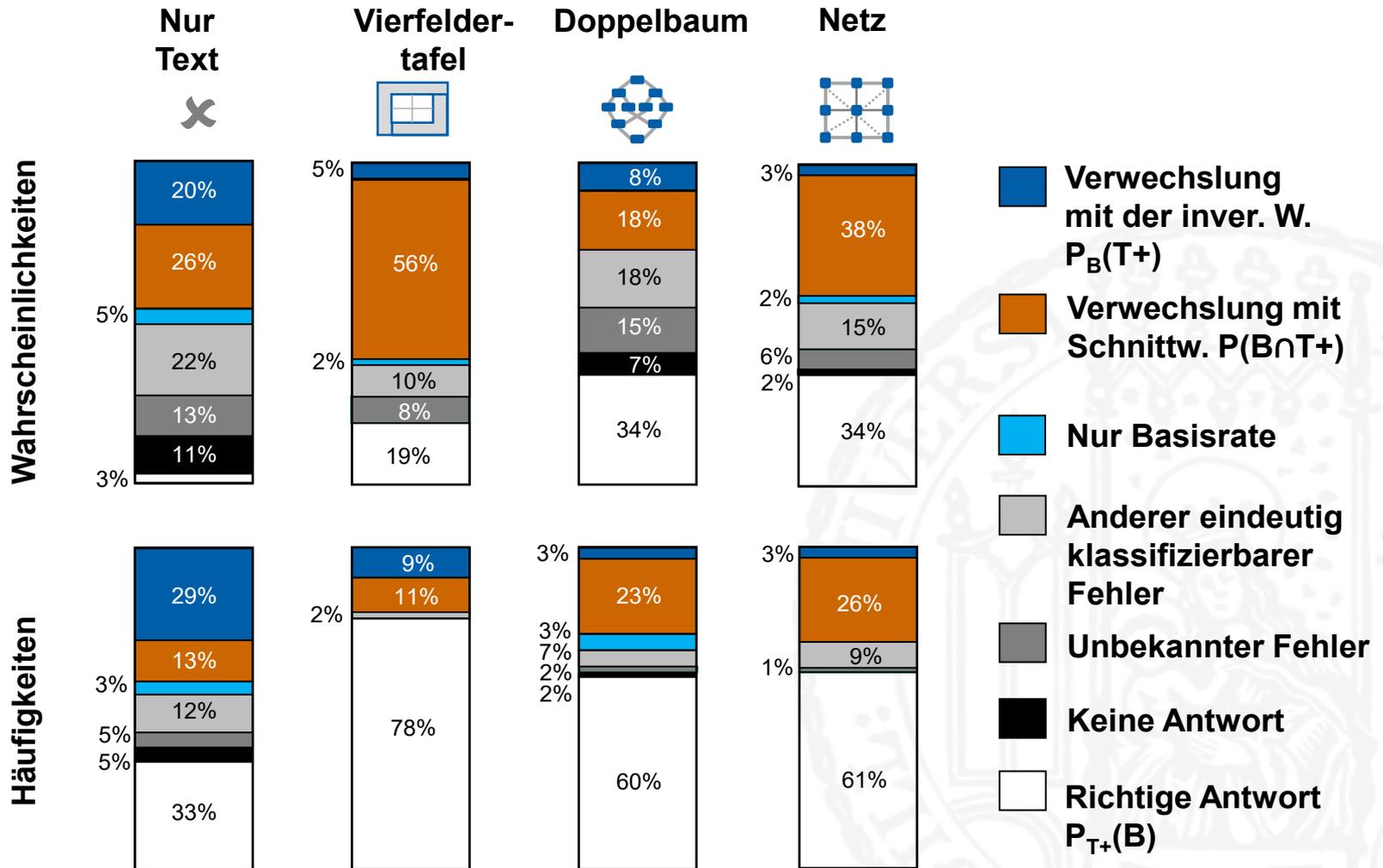
Richtige Lösung

BINDER, KRAUSS & WIESNER (2020)



Studie ■ Ergebnisse zu Fehlern

BINDER, KRAUSS & WIESNER (2020)



Typische Fehler bei Bayesianischen Aufgaben

A classroom scene with a chalkboard. The chalkboard displays a probability table and a question. A thought bubble on the right contains a question about the value 1,6%.

	B	\bar{B}	
T+	1,6%	9,8%	11,4%
T-	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%

$P_{T+}(B) = \underline{\hspace{2cm}}$

Aber das steht doch schon da!? ☹
1,6%

**Essentielles Fehlerwissen für Lehrkräfte –
aber auch wichtiges Fehlerwissen für
Schülerinnen und Schüler**

OSER, HASCHER & SPYCHINGER (1999)



Auch Donald Trump unterlag schon einmal einer dieser typischen Verwechslungen:

Donald Trump am 15. Oktober 2020:

„85% der Leute, die eine Maske tragen, stecken sich mit COVID an.“

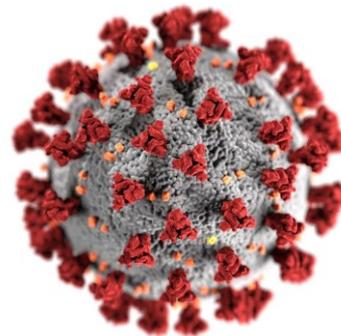
$P_{\text{Maske}}(\text{COVID})$

\neq

Faktencheck am 15. Oktober 2020:

„Eine kleine Studie zeigt: 85% der Leute, die an COVID erkrankt sind, hatten zuvor regelmäßig Maske getragen.“

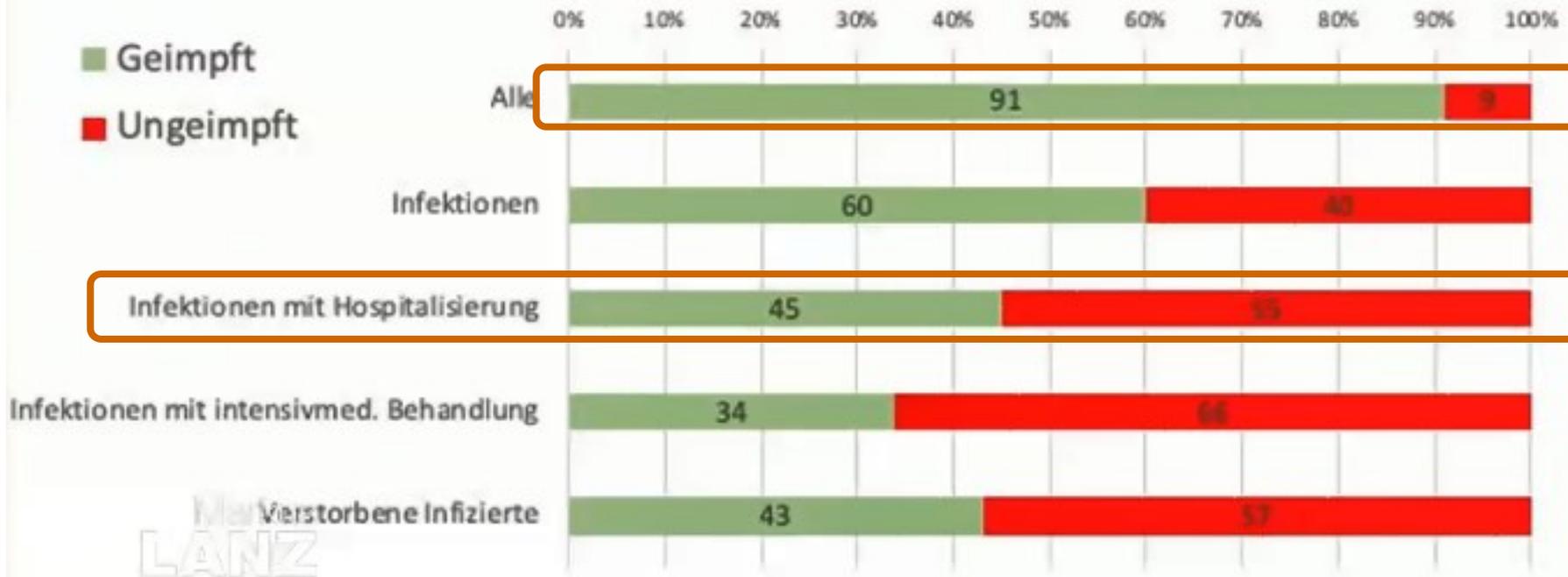
$P_{\text{COVID}}(\text{Maske})$



The screenshot shows the ZDF website interface for a video recording of the 'Markus Lanz' show. The navigation bar at the top includes the ZDF logo, 'Rubriken', 'Barrierefrei', 'Live-TV', 'Sendung verpasst', a search icon, and 'Mein ZDF'. The video title is 'Markus Lanz vom 10. November 2021'. The video frame shows a studio setting with five people seated in a semi-circle. A large inset image of Markus Lanz is visible in the upper right of the video frame. The ZDF logo is in the top left corner of the video frame, and the 'Markus LANZ' logo is in the bottom left corner. Below the video frame, a caption reads: 'Zu Gast: Politiker Stephan Weil, Virologin Melanie Brinkmann, Journalist Michael Bröcker und Klimaforscher Mojib Latif'. At the bottom right, there is a 'Markus LANZ' logo and the text 'Mehr von Markus Lanz'.

Der Impfeffekt

jeweils Altersklasse 60+; Infektionen: symptomatische Corona-Fälle mit bekanntem Impfstatus in den KWs 40-43

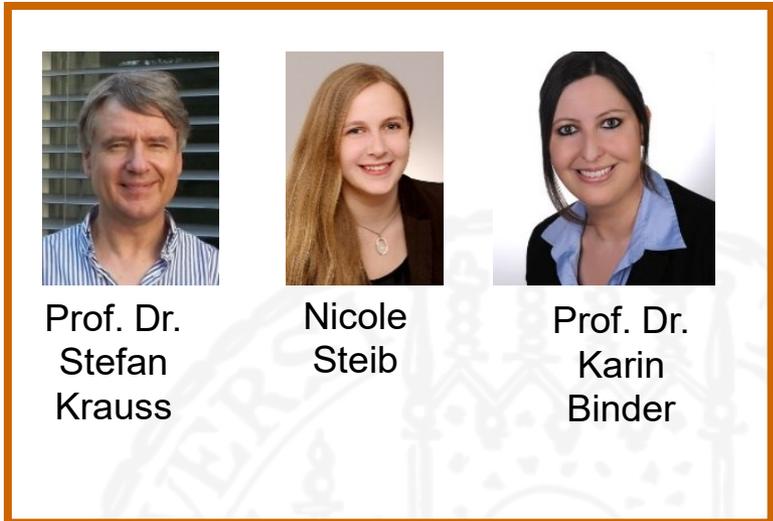
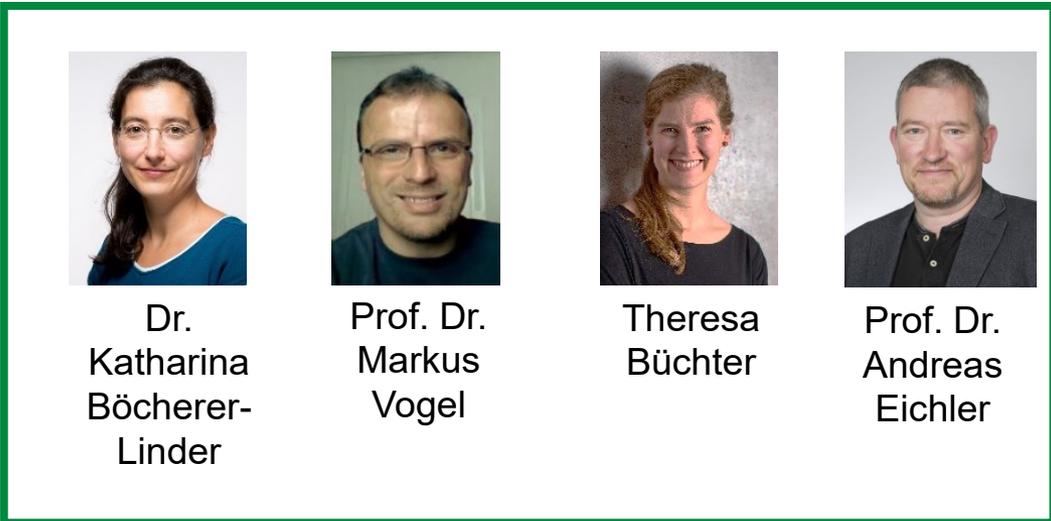


LANZ

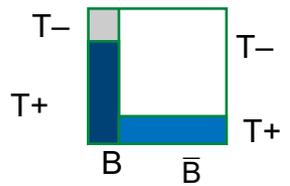
Aus dem DFG- Projekt: TrainBayes



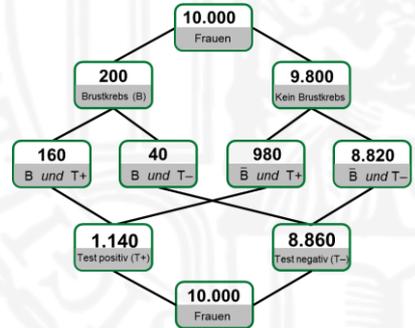
<http://www.bayesianreasoning.de>



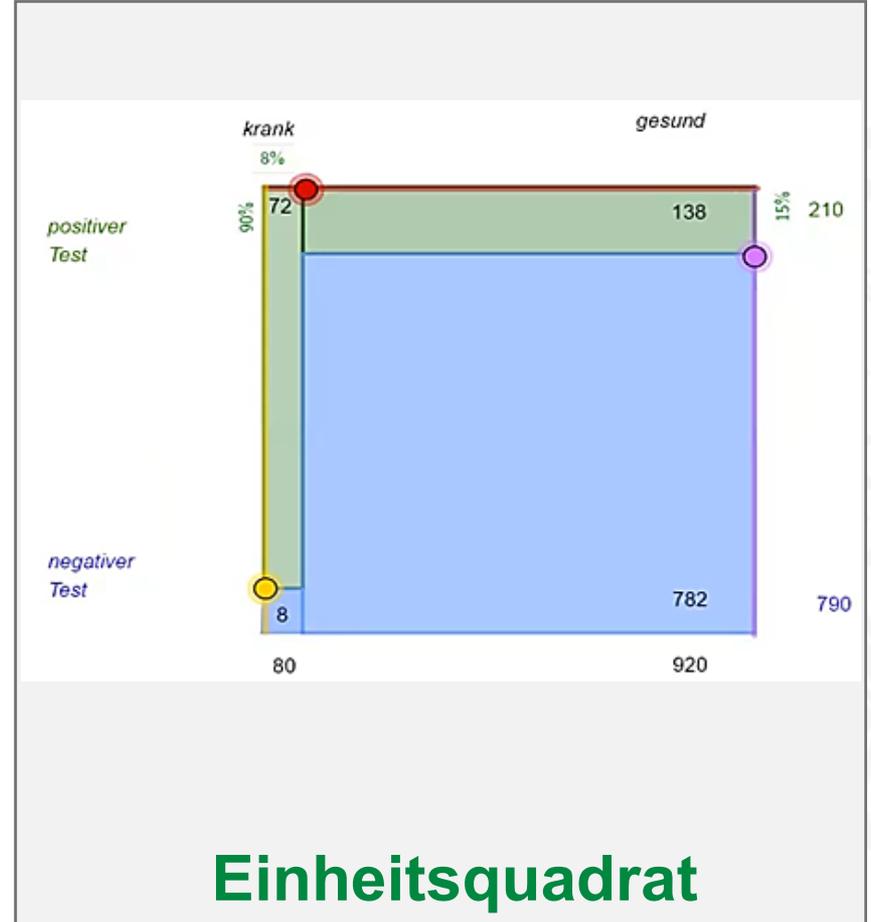
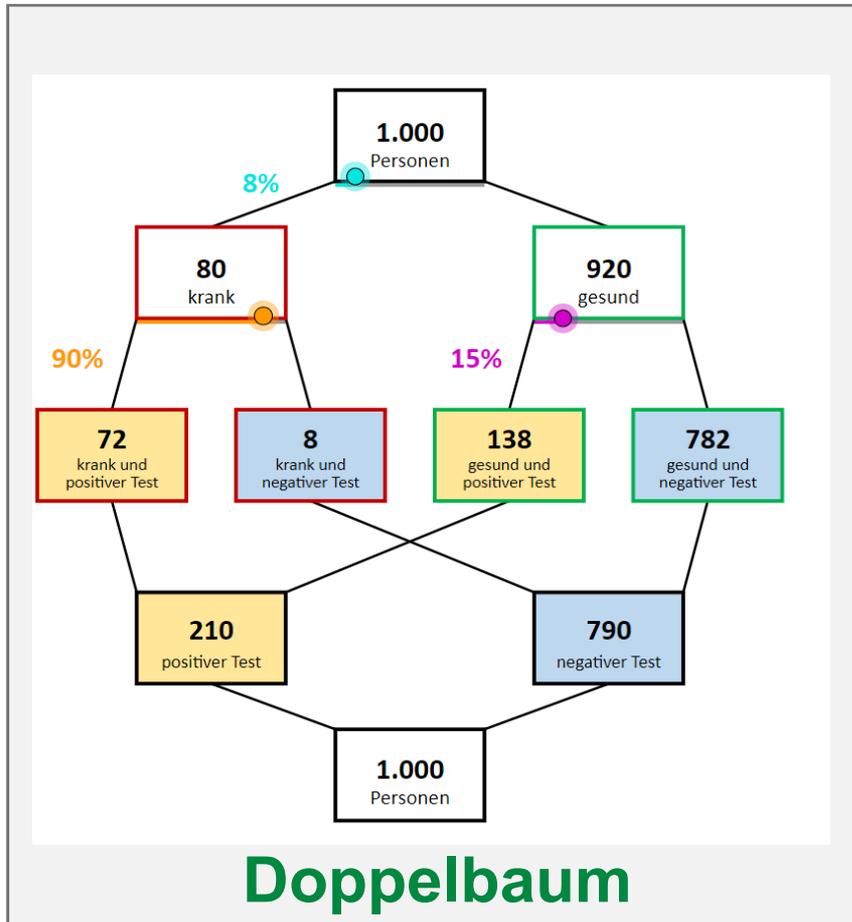
Gruppe Einheitsquadrat



Gruppe Knoten-Ast-Strukturen (Baum, Doppelbaum, Netz)

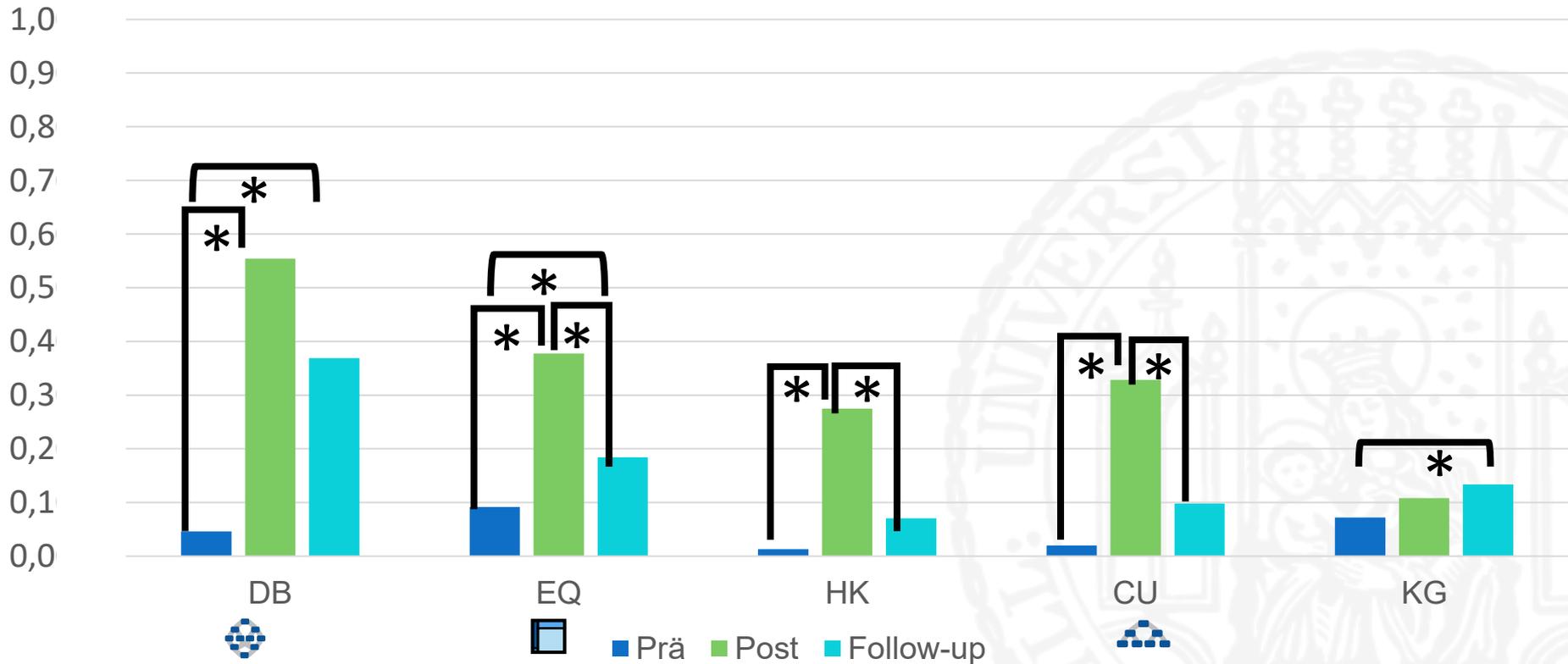


Vergleich zweier Ideal-Trainings mit weiteren Trainings



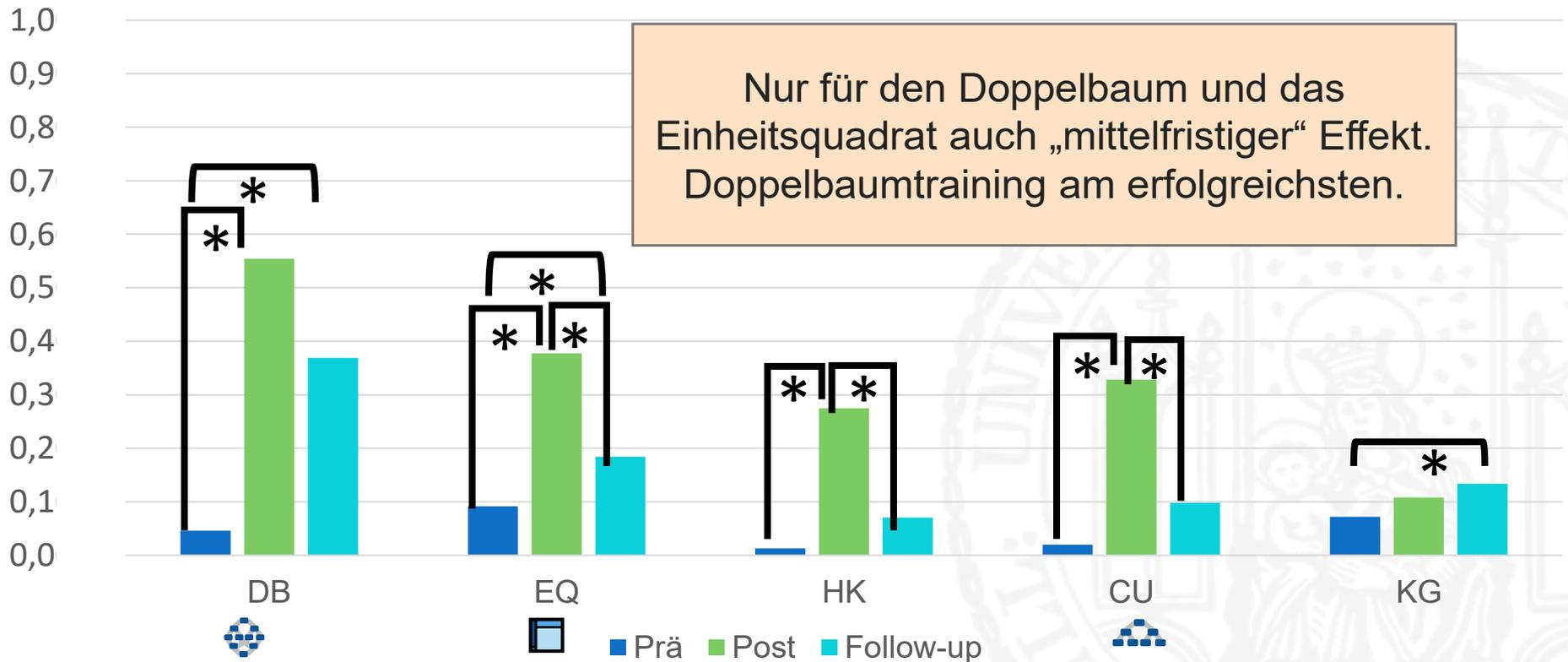
Jura

Anteil korrekter Lösungen bei der Berechnung des positiven Vorhersagewerts (Kalkulation) pro Trainingsgruppe



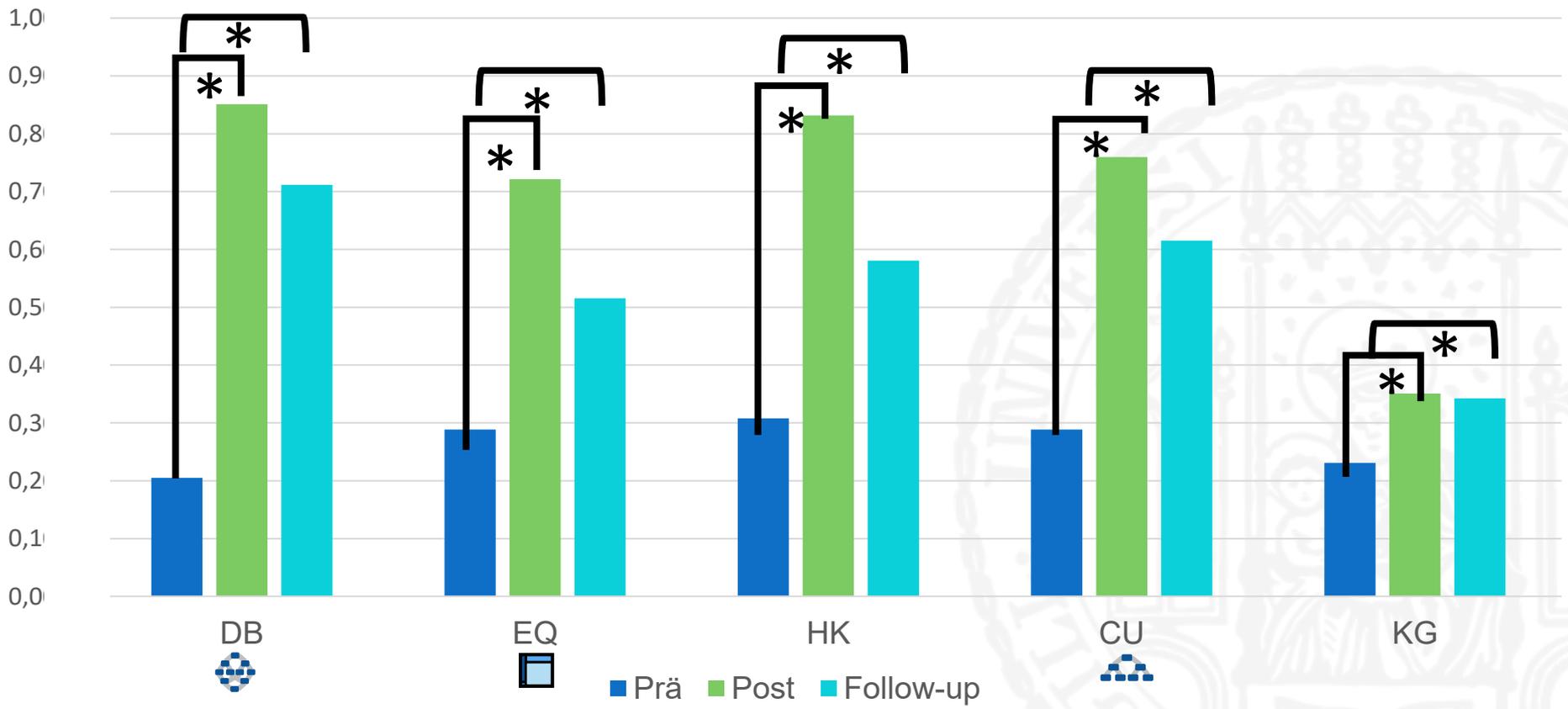
Jura

Anteil korrekter Lösungen bei der Berechnung des positiven Vorhersagewerts (Kalkulation) pro Trainingsgruppe



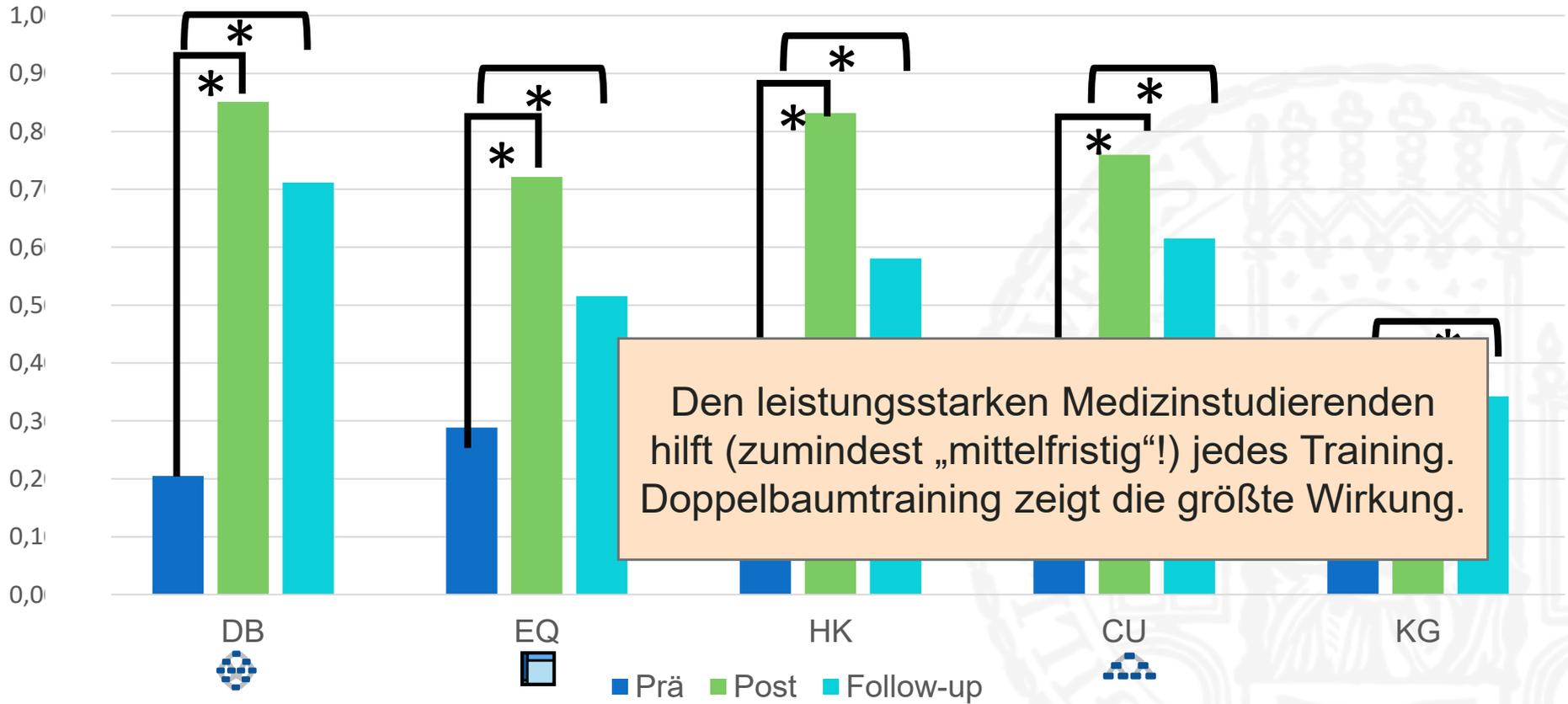
Medizin

Anteil korrekter Lösungen bei der Berechnung des positiven Vorhersagewerts (Kalkulation) pro Trainingsgruppe



Medizin

Anteil korrekter Lösungen bei der Berechnung des positiven Vorhersagewerts (Kalkulation) pro Trainingsgruppe



Sprachliche Unterstützung





Unterricht zu bedingten Wahrscheinlichkeiten, Schnittwahrscheinlichkeiten und Randwahrscheinlichkeiten und deren Unterscheidung ist immer auch...

Sprachunterricht!

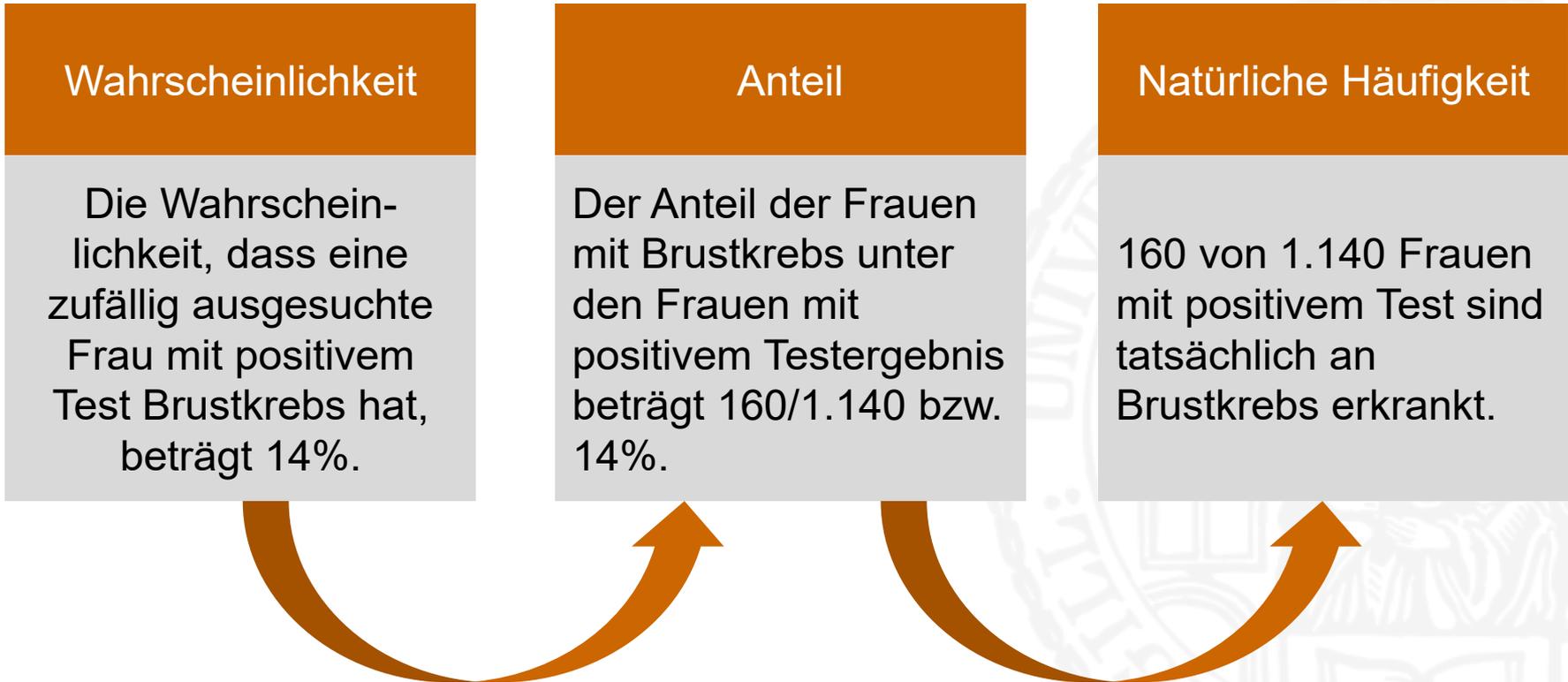
Hierbei können zwei Strategien helfen:

1. Rückübersetzung von Wahrscheinlichkeiten in Anteile oder natürliche Häufigkeiten

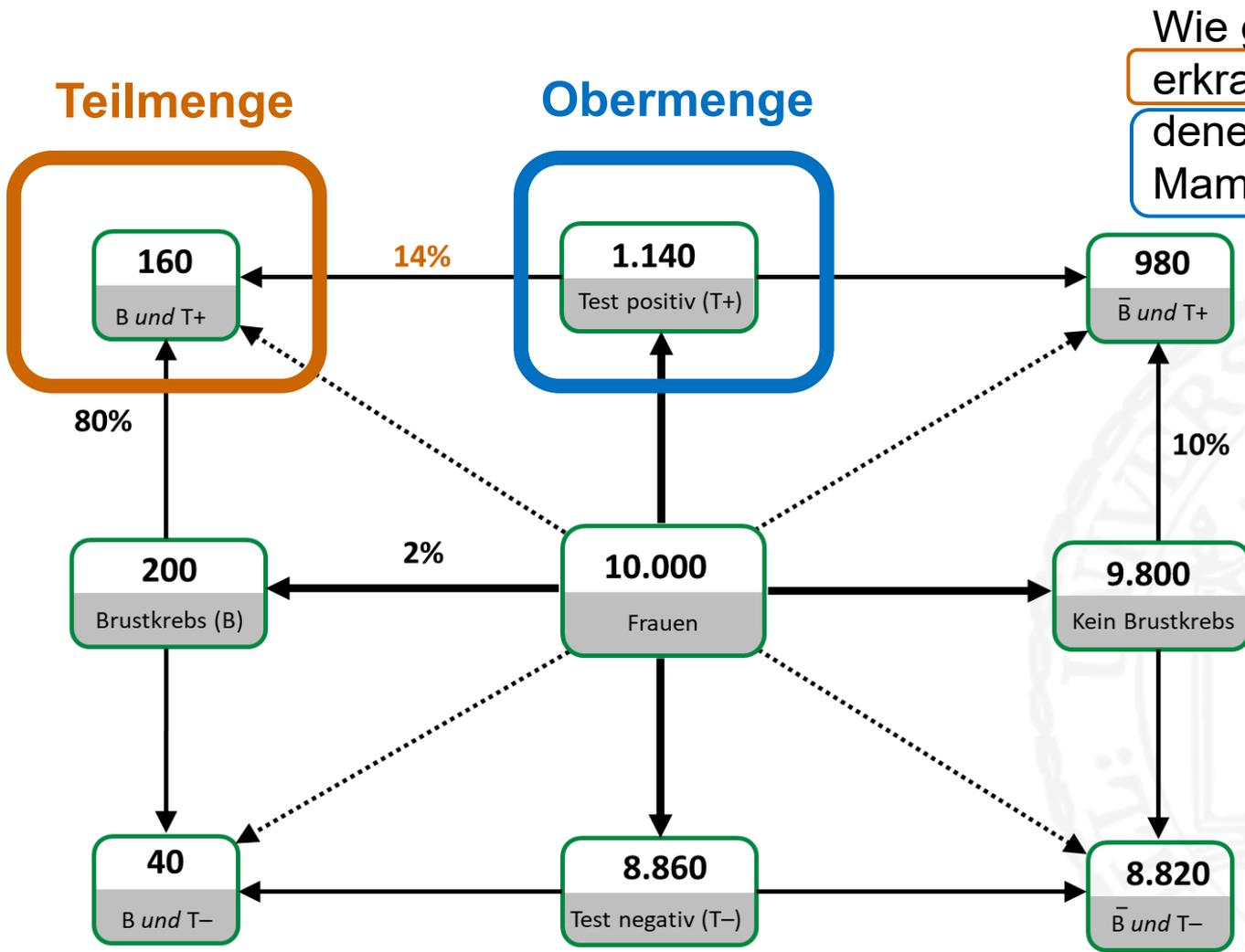
2. Herausarbeiten der Teilmengen-Obermengen-Beziehung



1. Rückübersetzung von Wahrscheinlichkeiten in Anteile oder natürliche Häufigkeiten



2. Herausarbeiten der
Teilmenge-Obermenge-
Beziehung



Wie groß ist der Anteil der erkrankten Frauen unter denen mit positiver Mammographie?

vgl. Post und Prediger (2020)

Fazit



- Versuchen Sie sich die Situation für eine **konkrete Stichprobe** vorzustellen (nicht nur in Prozent und Wahrscheinlichkeiten).
- **Häufigkeitsdoppelbäume** und **Häufigkeitsnetze** sind hilfreiche Visualisierungen, um einfacher zur jeweiligen Lösung zu gelangen und statistische Sachverhalte besser zu durchdringen.
- **Kontrastieren** Sie die typischen Falschantworten (invertierte bedingte Wahrscheinlichkeit und Schnittwahrscheinlichkeit).
- **Sprachförderlicher Mathematikunterricht** ist beim Thema bedingte Wahrscheinlichkeiten besonders wichtig.



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

(Fragen, Anregungen, Kritik auch
gerne an Karin.Binder@lmu.de)





- Barbey, A. K., & Sloman, S. A. (2007). Base-rate respect: From ecological rationality to dual processes. *Behavioral and Brain Sciences*, *30*(3), 241-297.
- Binder, K., Krauss, S., & Wiesner, P. (2020). A new visualization for probabilistic situations containing two binary events: The frequency net. *Frontiers in Psychology*, *11*(750).
- Binder, K., Krauss, S., Schmidmaier, R., Braun, L. (accepted). Natural frequency trees improve diagnostic efficiency in Bayesian reasoning. *Advances in Health Sciences Education*.
- Binder, K., Krauss, S., & Steib, N. (2020). Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Schnittwahrscheinlichkeiten GLEICHZEITIG visualisieren: Das Häufigkeitsnetz. *Stochastik in der Schule*, *40*(2), 2-14.
- Binder, K., Krauss, S., Bruckmaier, G. & Marienhagen, J. (2018). Visualizing the Bayesian 2-test case: The effect of tree diagrams on medical decision making. *PLoS ONE*, *13*(3).
- Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information – An empirical study on tree diagrams and 2 x 2 tables. *Frontiers in Psychology*, *6*(1186).
- Brase, G. L. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. *Appl. Cogn. Psychol.* *23*, 369–381.
- Brase, G. L. (2014). The power of representation and interpretation. Doubling statistical reasoning performance with icons and frequentist interpretations of ambiguous numbers. *J. Cogn. Psychol.* *26*, 81–97.
- Brase, G. (2020). What facilitates Bayesian reasoning? A crucial test of ecological rationality versus nested sets hypotheses. *Psychonomic Bulletin & Review*, 1-7.
- Böcherer-Linder, K., and Eichler, A. (2019). How to improve performance in bayesian inference tasks: a comparison of five visualizations. *Frontiers in Psychology*, *10*(267).
- Bruckmaier, G., Binder, K., Krauss, S., & Kufner, H. (2019). An eye-tracking study of statistical reasoning with tree diagrams and 2x2 tables. *Frontiers in Psychology*, *10*(632).
- Cosmides, L., and Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition* *58*, 1–73.
- Eddy, D. M. (1982). "Probabilistic reasoning in clinical medicine: problems and opportunities," in *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*, eds D. Kahneman, P. Slovic, and A. Tversky (New York, NY: Cambridge University Press), 249–267.
- Eichler, A., Böcherer-Linder, K., & Vogel, M. (2020). Different Visualizations Cause Different Strategies When Dealing With Bayesian Situations. *Frontiers in Psychology*, *11*.
- Días, C., and Batanero, C. (2009). University Students' knowledge and Biases in conditional probability reasoning. *Int. Electr. J. Math. Educ.* *4*, 131–162.
- Garcia-Retamero, R., and Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Soc. Sci. Med.* *83*, 27–33.



- Gigerenzer, G., and Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychol. Rev.* 102, 684–704.
- Haller, H., & Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers. *Methods of Psychological Research*, 7(1), 1-20.
- Hill, W. T., & Brase, G. L. (2012). When and for whom do frequencies facilitate performance? On the role of numerical literacy. *Quarterly journal of experimental psychology*, 65(12), 2343-2368.
- Johnson, E. D., and Tubau, E. (2013). Words, numbers, & numeracy. Diminishing individual differences in Bayesian reasoning. *Learn. Individ. Differ.* 28, 34–40.
- Khan, A., Breslav, S., Glueck, M., & Hornbaek, K. (2015). Benefits of visualization in the mammography problem. *International Journal of Human-Computer Studies*, 83, 94-113.
- Lesage, E., Navarrete, G., and De Neys, W. (2013). Evolutionary modules and Bayesian facilitation: the role of general cognitive resources. *Think. Reason.* 19, 27–53.
- Leuders, T. & Loibl, K. (2020) Processing Probability Information in Nonnumerical Settings – Teachers’ Bayesian and Non-bayesian Strategies During Diagnostic Judgment. *Frontiers in Psychology*, 11(678).
- McDowell, M., and Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychol. Bull.* 143, 1273–1312.
- Micallef, L., Dragicevic, P., and Fekete, J.-D. (2012). Assessing the effect of visualizations on Bayesian reasoning through crowdsourcing. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* 18, 2536–2545.
- Oldford, R. W., and Cherry, W. H. (2006). Picturing Probability. The Poverty Of Venn Diagrams, the Richness Of Eikosograms. Available online at: <http://sas.uwaterloo.ca/~rwoldfor/papers/venn/eikosograms/paperpdf.pdf> (accessed October 12, 2006).
- Ottley, A., Peck, E. M., Harrison, L. T., Afergan, D., Ziemkiewicz, C., Taylor, H. A., ... & Chang, R. (2015). Improving Bayesian reasoning: The effects of phrasing, visualization, and spatial ability. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 22(1), 529-538.
- Pfannkuch, M., and Budgett, S. (2017). Reasoning from an Eikosogram: An exploratory study. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Edn.* 3, 283–310.
- Reani, M., Davies, A., Peek, N., and Jay, C. (2018). How do people use information presentation to make decisions in Bayesian reasoning tasks? *Int. J. Hum. Comput. Stud.* 111, 62–77.
- Sedlmeier, P., and Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *J. Exp. Psychol. Gen.* 130, 380–400.
- Schneps, L., and Colmez, C. (2013). *Math on Trial: How Numbers Get Used and Abused in the Courtroom*. New York, NY: Basic Books.
- Siegrist, M., and Keller, C. (2011). Natural frequencies and Bayesian reasoning. The impact of formal education and problem context. *J. Risk Res.* 14, 1039–1055.
- Sirota, M., Kostovièová, L., and Juanchich, M. (2014). The effect of iconicity of visual displays on statistical reasoning. Evidence in favor of the null hypothesis. *Psychonom. Bull. Rev.* 21, 961–968.
- Sloman, S. A., Over, D., Slovak, L., & Stibel, J. M. (2003). Frequency illusions and other fallacies. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 91, 296-309.



- Steckelberg, Anke, et al. (2004) Explaining computation of predictive values: 2x 2 table versus frequency tree. A randomized controlled trial [ISRCTN74278823]. *BMC medical education* 4(1),13.
- Talbot, A. N., and Schneider, S. L. (2017). Improving accuracy on Bayesian inference problems using a brief tutorial. *J. Behav. Dec. Making* 30, 373–388.
- Ufer, S. (im Druck). Studierfähigkeit als Zieldimension von Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe.
- Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens - Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen*. Hildesheim: Franzbecker.
- Weber, P., Binder, K., & Krauss, S. (2018). Why can only 24% solve Bayesian reasoning problems in natural frequencies? Frequency phobia in spite of probability blindness. *Frontiers in Psychology*, 9(1833).
- Yamagishi, K. (2003). Facilitating normative judgments of conditional probability. Frequency or nested sets? *Exp. Psychol.* 50, 97–106.
- Zhu, L., and Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems. The role of representation in mental computation. *Cognition* 98, 287–308.
- Zikmund-Fisher, B. J., Witteman, H. O., Dickson, M., Fuhrel-Forbis, A., Kahn, V. C., Exe, N. L., et al. (2014). Blocks, ovals, or people? Icon type affects risk perceptions and recall of pictographs. *Med. Decis. Making* 34, 443–453.