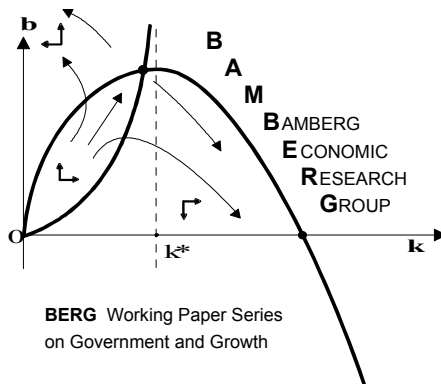


# AK-MODELL MIT STAATSVerschULDUNG UND FESTER DEFIZITQUOTE

Julia Bersch

Working Paper No. 48  
July 2004



Bamberg Economic Research Group  
on Government and Growth  
Bamberg University  
Feldkirchenstraße 21  
D-96045 Bamberg  
Telefax: (0951) 863 5547  
Telephone: (0951) 863 2547  
E-mail: [public-finance@sowi.uni-bamberg.de](mailto:public-finance@sowi.uni-bamberg.de)  
<http://www.uni-bamberg.de/sowi/economics/wenzel/berg>

ISBN 3-931052-44-3



# **AK-MODELL MIT STAATSVerschULDUNG UND FESTER DEFIZITQUOTE**

von

**Julia Bersch**\*

## **ZUSAMMENFASSUNG**

Die Auswirkungen einer staatlichen Verschuldung auf das Wirtschaftswachstum werden im Rahmen eines erweiterten neoklassischen Wachstumsmodells mit AK-Technologie analysiert. Der Staat verfolgt das Ziel einer festen Defizitquote und einer langfristig konstanten Schuldenquote. In diesem Fall gibt es eine kritische Defizitquote, bei dessen Unterschreitung ein eindeutiger, stabiler Steady State existiert. Wird hingegen der kritische Wert überschritten, so existiert kein Wachstumsgleichgewicht.

## **ABSTRACT**

The effects of public debt on economic growth are analyzed in an augmented neoclassical growth model with AK-technology. The objective of the government is a fixed deficit ratio and in the long run a constant debt ratio. Then there is a critical deficit ratio and if the deficit ratio falls below it, a unique, stable steady state exists. If the critical value is exceeded, there is no steady state.

**JEL Klassifikation:** E13, E62, H62, H63

**Schlüsselwörter:** AK-Modell, Wachstum, Staatsverschuldung, feste Defizitquote

**Keywords:** AK-model, growth, public debt, fixed deficit ratio

---

\* Lehrstuhl für Finanzwissenschaft, Universität Bamberg, [julia@bersch.de](mailto:julia@bersch.de); ab Juli 2004: Seminar für Makroökonomie, Institut für Volkswirtschaftslehre, Ludwig-Maximilians-Universität München, [julia.bersch@lrz.uni-muenchen.de](mailto:julia.bersch@lrz.uni-muenchen.de)



## **Inhaltsverzeichnis**

|  |    |
|--|----|
| Grafik- und Tabellenverzeichnis .....          | II |
| 1 Einführung .....                             | 1  |
| 2 Das Modell .....                             | 3  |
| 2.1 Produktionsstruktur .....                  | 3  |
| 2.2 Kreislaufidentität .....                   | 5  |
| 2.3 Verhaltensannahmen für die Haushalte ..... | 5  |
| 2.4 Verhaltensannahmen für den Staat .....     | 5  |
| 3 Steady State .....                           | 6  |
| 4 Stabilität .....                             | 10 |
| 5 Komparativ-statische Analyse .....           | 13 |
| 5.1 Erhöhung der Defizitquote .....            | 14 |
| 5.2 Erhöhung der Sparquote .....               | 16 |
| 5.3 Erhöhung der Staatsquote .....             | 17 |
| 5.4 Positiver technologischer Schock .....     | 18 |
| 5.5 Auswirkungen auf den Steuersatz .....      | 19 |
| 6 Schlussbetrachtung .....                     | 19 |
| Literaturverzeichnis .....                     | 22 |
| Anhang .....                                   | 24 |

## **Grafik- und Tabellenverzeichnis**

|   |    |
|---|----|
| Grafik 1: Existenz von Wachstumsgleichgewichten .....                       | 8  |
| Tabelle 1: Defizitquoten und Wachstumsraten .....                           | 9  |
| Grafik 2: Stabilität des Steady State .....                                 | 12 |
| Grafik 3: Erhöhung der Defizitquote .....                                   | 15 |
| Grafik 4: Zeitpfade der Wachstumsraten von Kapital und Staatsschulden ..... | 15 |
| Grafik 5: Erhöhung der Sparquote .....                                      | 16 |
| Grafik 6: Erhöhung der Staatsquote .....                                    | 17 |
| Grafik 7: Positiver technologischer Schock .....                            | 18 |

## **1 Einführung**

Der Zusammenhang zwischen Wirtschaftswachstum und Staatsverschuldung steht wieder im Mittelpunkt des öffentlichen Interesses. Das Wirtschaftswachstum in Deutschland stagniert seit ein paar Jahren. 2003 hat die Bundesrepublik die vom Europäischen Stabilitätspakt<sup>1</sup> vorgesehene Defizitgrenze von 3% des Bruttoinlandsproduktes (BIP) zum zweiten Mal in Folge überschritten und wird dies voraussichtlich auch 2004 tun. Der öffentliche Schuldenstand liegt bei über 60% des BIP und erfüllt damit die Vorgaben des Stabilitätspaktes seit 2002 nicht mehr. (Europäische Kommission (2004)) Bei wachsenden Defizitquoten ergibt sich langfristig auch eine steigende Schuldenquote. Obwohl der in Maastricht ausgehandelte Vertrag den Titel „Stabilitäts- und Wachstumspakt“ trägt, scheint dieser wachstumshemmend zu sein. Aus diesem Grund werden die Vorgaben des Maastrichter Vertrages zunehmend kritisch hinterfragt.

Daher sollen in der vorliegenden Arbeit die Auswirkungen einer staatlichen Verschuldung auf das Wirtschaftswachstum im Rahmen eines erweiterten neoklassischen Wachstumsmodells nach Solow (1956) analysiert werden. Das Ziel des Staates ist dabei eine fixe Defizitquote und eine langfristig konstante Schuldenquote. Es wird mit AK-Technologie produziert und das Sparverhalten ist gemäß den Annahmen von Solow exogen gegeben.

Im Wachstumsmodell von Solow (1956) wird wirtschaftliches Wachstum allein durch exogenes Bevölkerungswachstum erklärt. Im Steady State ist das Pro-Kopf-Einkommen konstant. Empirische Untersuchungen des Modells (z.B. Mankiw, Romer, Weil (1992)) haben gezeigt, dass das Wachstum hauptsächlich über eine Residualgröße der Produktionsfunktion erklärt wird, die im Modell selber nur über die Einführung exogenen technischen Fortschritts gelöst werden kann. Eine AK-Produktionstechnologie, wie sie im Folgenden verwendet wird, bietet eine Möglichkeit, technischen Fortschritt und damit ein wachsendes Pro-Kopf-Einkommen endogen zu erklären. Das AK-Modell ist die einfachste Variante in der endogenen Wachstumstheorie. Es wurde von Frankel (1962)

---

<sup>1</sup> Der Europäische Stabilitäts- und Wachstumspakt ist Bestandteil des Vertrages von Maastricht (1992) und sollte in erster Linie die EU-Länder auf den Eintritt in die Europäische Währungsunion vorbereiten. Die dort enthaltenen fünf Konvergenzkriterien umfassen neben den beiden fiskalischen Kriterien des Haushaltsdefizits und des Schuldenstandes, die das öffentliche Defizit bzw. die Verschuldung auf Werte von 3% bzw. 60% relativ zum BIP begrenzen, Inflations-, Zins- und Wechselkurskriterien.

eingeführt und von Romer (1986) wiederentdeckt, der zur Begründung der AK-Technologie die Theorie des „Learning by Doing“ von Arrow (1962) aufgriff. Das einfache AK-Modell in der hier betrachteten Form wurde erstmals von Rebelo (1991) verwendet und ist durch ein konstantes Grenzprodukt des Kapitals (und damit eine Verletzung der Inada-Bedingungen) gekennzeichnet. Das Wachstum des Outputs hängt ausschließlich vom Kapitalwachstum ab und ist somit unabhängig vom Bevölkerungswachstum. Dies ist plausibel, wenn Kapital im weiteren Sinne auch Humankapital umfasst. (Aghion, Howitt (1998); Barro, Sala-i-Martin (1995); Maußner, Klump (1996))

Das Wachstumsmodell von Solow (1956) wird um den staatlichen Sektor erweitert. In diesem Modellrahmen untersuchen Wenzel (1986, 1994a, 1994b) und Wenzel, Wrede (1993) die Auswirkungen von Staatsverschuldung auf das Wirtschaftswachstum formal und grafisch bei alternativen Fiskalregimen. Es kann gezeigt werden, dass Parameterkonstellationen möglich sind, bei denen eine staatliche Verschuldung effizienzsteigernd ist, indem sie die Realisierung des konsummaximalen Steady State („Golden Rule“) ermöglicht. So kann der Staat durch Kreditaufnahme eine zu hohe private Ersparnis absorbieren und in konsumtive Verwendungen umlenken. Wenzel und Wrede (2000) zeigen in einer erweiterten Betrachtung, dass in einem föderalen Staat die Wahrscheinlichkeit für ein instabiles Wachstumsgleichgewicht steigt und eine Flexibilisierung der staatlichen Instrumente empfehlenswert scheint.

In der vorliegenden Arbeit soll der zuvor genannte Ansatz dahingehend modifiziert werden, dass in dem erweiterten zeitstetigen Solow-Modell mit AK-Technologie produziert wird und die Argumentation in Anlehnung an das von Bräuninger (2002) verwendete Modell aufgebaut wird. Bräuninger (2002) analysiert die Effekte von Staatsverschuldung auf das endogene Wachstum in einem zeitdiskreten überlappenden Generationenmodell (OLG-Modell) und kommt zu dem Ergebnis, dass es bei der staatlichen Fixierung einer Defizitquote einen kritischen Wert gibt. Liegt die Defizitquote darunter, dann gibt es zwei Steady States, von denen einer lokal stabil und der andere instabil ist. Wird die kritische Defizitquote jedoch überschritten, gibt es keinen Steady State und die Wachstumsrate des Kapitals sinkt kontinuierlich, bis der Kapitalstock gleich null ist. Diese Arbeit hingegen kommt zu dem Schluss, dass es zwar ebenfalls eine kritische Defizitquote gibt, aber bei deren Unterschreitung ein eindeutiger und stabiler Steady



State existiert. Dieser Unterschied basiert auf divergierenden Annahmen zum Sparverhalten, die unterschiedliche Wachstumsraten des Kapitals zur Folge haben.

Zeitnah zur Entstehung dieser Arbeit ist Bräuninger (2003) zu ähnlichen Ergebnissen gelangt. Die Ausführungen der vorliegenden Arbeit sind jedoch detaillierter und weichen in der Darstellung an einigen Stellen ab, insbesondere wird die Stabilität des Steady State auch mathematisch untersucht.

Im folgenden Abschnitt wird zuerst das Modell vorgestellt, um dann in Abschnitt 3 die Existenz eines Steady State und in Abschnitt 4 seine Stabilität zu untersuchen. Darauf aufbauend wird im Abschnitt 5 eine komparativ-statische Analyse, insbesondere für eine Änderung der Defizitquote, vorgenommen. Abschließend werden die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und kritisch gewürdigt, um Schwachstellen des Modells und Erweiterungsmöglichkeiten aufzuzeigen.

## **2 Das Modell**

### **2.1 Produktionsstruktur**

Es wird eine geschlossene Volkswirtschaft, die mit AK-Technologie produziert, betrachtet.

Eine Vielzahl identischer Unternehmen produziert ein Gut<sup>2</sup>  $Y$ , das sowohl Konsum- als auch Investitionsgut ist. Die Produktion  $Y_i$  eines Unternehmens  $i$  ist eine Cobb-Douglas-Funktion des vom Unternehmen eingesetzten Kapitals  $K_i$  und der beschäftigten Menge Arbeit  $N_i$ :

$$(1) \quad Y_i = AK_i^\alpha (EN_i)^\beta, \quad A > 0, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$$

wobei  $A$  eine das Technologieniveau widerspiegelnde, positive Konstante ist und  $E$  ein für die Unternehmen exogener Arbeitseffizienzindex.

Bei vollständiger Konkurrenz maximiert jedes Unternehmen seinen Gewinn, indem es für den gegebenen Zins  $r$  und den Lohnsatz  $w$  seine Nachfrage nach Arbeit und Kapital derart anpasst, dass die Produktionsfaktoren gemäß ihrer Grenzproduktivitäten entlohnt

---

<sup>2</sup> Es wird in der gesamten Arbeit mit Nettogrößen argumentiert, so dass Abschreibungen nicht explizit berücksichtigt werden müssen. Auch von Inflation wird abstrahiert, so dass keine Unterscheidung zwischen Nominal- und Realgrößen notwendig ist.

werden:  $\partial Y_i / \partial K_i = \alpha Y_i / K_i = r$  und  $\partial Y_i / \partial N_i = \beta Y_i / N_i = w$ . Da alle Unternehmen mit derselben Technologie und denselben Faktorpreisen produzieren, werden sie auch die Produktionsfaktoren im selben Verhältnis einsetzen. Die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion ergibt sich dann als:

$$(2) \quad \sum_i Y_i = Y = AK^\alpha (EN)^\beta.$$

E misst die Effizienz des Arbeitseinsatzes, die sich annahmegemäß proportional zur gesamtwirtschaftlichen Kapitalintensität verhält,  $E = K/N$ , und somit endogen für die Volkswirtschaft ist. Begründet werden kann dies anhand positiver externer Effekte der Kapitalbildung („Learning by Doing“, Arrow (1962)). So sammeln Arbeitskräfte als unbeabsichtigtes „Nebenprodukt“ ihrer Tätigkeit Erfahrungen in der Produktion und im Umgang mit neuen Kapitalgütern, welche ihre zukünftige Produktivität erhöhen. Durch die Fluktuation der Arbeitskräfte kommt es dann zu einem (nichttrivalen) Austausch des Know-hows zwischen den Unternehmen. Die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion kann daher vereinfacht werden zu:

$$(3) \quad Y = AK.$$

E ist zwar endogen für die Volkswirtschaft, aber exogen für das einzelne Unternehmen, da dieses nur einen vernachlässigbaren Teil des positiven externen Effektes seiner Investitionsentscheidung (einer zusätzlich eingesetzten Kapitaleinheit) auf den gesamtwirtschaftlichen Kapitalstock internalisieren kann. Bei gegebenem Angebot auf dem Arbeits- und Kapitalmarkt führt das einzelwirtschaftliche Kalkül dazu, dass sich der Zins, mit dem die Unternehmen die Kapitaldienste entlohnen, als

$$(4) \quad r = \frac{\sum_i \frac{\partial Y_i}{\partial K_i} K_i}{K} = \alpha A$$

ergibt und der Lohnsatz als

$$(5) \quad w = \frac{\sum_i \frac{\partial Y_i}{\partial N_i} N_i}{N} = \beta \frac{Y}{N}.$$

## 2.2 Kreislaufidentität

Für eine geschlossene Volkswirtschaft, in welcher der Staat einen Teil seiner Ausgaben durch Kreditaufnahme finanziert, ergibt sich die Kreislaufidentität

$$(6) \quad S = I + D.$$

Die private Ersparnis (S) entspricht also ex-post der Summe aus privaten Investitionen (I) und staatlichem Defizit (D). Nur die privaten Investitionen erhöhen den gesamtwirtschaftlichen Kapitalstock (K) und die staatlichen Ausgaben haben ausschließlich konsumtiven Charakter. In zeitstetiger Formulierung ergibt sich somit

$$(7) \quad \dot{K} = I,$$

wobei die Ableitung einer Bestandsgröße nach der Zeit mit einem Punkt bezeichnet

wird,  $\dot{K} = \frac{dK}{dt}$ .

## 2.3 Verhaltensannahmen für die Haushalte

Die private Ersparnis ergibt sich gemäß dem Wachstumsmodell von Solow (1956) als konstanter Teil des verfügbaren Einkommens der Haushalte<sup>3</sup> ( $Y^v$ ):

$$(8) \quad S = sY^v.$$

Das verfügbare Einkommen ergibt sich als Summe aus dem Nettosozialprodukt (Y) und den Zinszahlungen des Staates (rB) abzüglich der Steuern (T):

$$(9) \quad Y^v = Y + rB - T.$$

## 2.4 Verhaltensannahmen für den Staat

Der Staat tätigt Ausgaben (G), die einen konstanten Teil des Nettosozialproduktes ausmachen,  $g = G/Y = \text{konstant}$ . Zur Finanzierung dieser Ausgaben erhebt der Staat einerseits Steuern mit dem Steuersatz  $\tau$  auf das Volkseinkommen und auf die Zinszahlungen aus dem Besitz staatlicher Schuldtitel,

$$(10) \quad T = \tau(Y + rB),$$

andererseits emittiert er neue Schuldtitel. Das staatliche Defizit (D) als fester Teil des

---

<sup>3</sup> Eine konstante Sparquote kann auch als Ergebnis der intertemporalen Nutzenmaximierung eines repräsentativen Individuums betrachtet werden, dessen Nutzen über eine CIES-Funktion beschrieben wird. (Kurz (1968))

Nettosozialproduktes,  $d = D/Y = \text{konstant}$ , wird vollständig kreditfinanziert<sup>4</sup> und erhöht somit den staatlichen Schuldenstand  $B$ :

$$(11) \quad D = \dot{B}.$$

Staatliche und private Schuldtitel sind annahmegemäß perfekte Substitute, so dass auch die Staatsschulden mit dem Marktzins  $r$  verzinst werden. Auf den staatlichen Schuldenstand  $B$  sind somit Zinszahlungen in Höhe von  $rB$  an die privaten Haushalte zu leisten. Als dynamische staatliche Budgetbeschränkung ergibt sich:

$$(12) \quad D = G - T + rB$$

und unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen:

$$(13) \quad dY = (g - \tau)Y + (1 - \tau)rB.$$

Der Staat kann sein Defizit über die Staatsquote  $g$ , die Defizitquote  $d$  und den Steuersatz  $\tau$  steuern. Unter der Annahme, dass die Staatsquote exogen gegeben ist, kann der Staat entweder die Defizitquote oder den Steuersatz festsetzen. Hier wird das Ziel einer fixen Defizitquote seitens des Staates postuliert, so dass der Steuersatz  $\tau$  sich dann endogen wegen der Notwendigkeit eines formellen Budgetausgleiches ergibt.

### 3 Steady State

Die Gleichungen (3) bis (13) beschreiben die Entwicklung der Volkswirtschaft.

Das Wachstumsgleichgewicht<sup>5</sup> der Volkswirtschaft, der sogenannte Steady State, ist dadurch gekennzeichnet, dass Kapital, Output und Staatsschulden mit gleicher Rate wachsen. Im Steady State sind also die Schuldenquote  $B/Y$ , die Kapitalquote  $K/Y$  und die Schulden-Kapitalquote  $B/K$  konstant. Bei AK-Technologie muss im Gegensatz zum

---

<sup>4</sup> Das staatliche Defizit ist die Differenz von Staatsausgaben abzüglich der Staatseinnahmen. Grundsätzlich kann ein Staat seine Haushaltsdefizite durch Geldschöpfung oder öffentliche Kreditaufnahme finanzieren. Hier wird die Möglichkeit der Geldschöpfung ausgeschlossen, da sie in Deutschland mit Ausnahme des Münzregals und der Kassenverstärkungskredite verboten ist.

<sup>5</sup> In der dynamischen Analyse von Wachstumsmodellen ist das Konzept des Wachstumsgleichgewichtes, als Gegenstück zu einem statischen Marktgleichgewicht, dadurch gekennzeichnet, dass die Wachstumsraten von Modellvariablen oder das Verhältnis zweier im Zeitablauf stetig wachsender Größen konstant sind. (Maußner, Klump (1996), S. 29)

Solow-Modell die Kapitalintensität im Steady State nicht konstant sein, da die Bevölkerung nicht mit derselben Rate wachsen muss wie das Kapital.

Im Steady State wächst das Sozialprodukt mit konstanter Rate. Wie aus (3) ersichtlich ist, entspricht die Wachstumsrate des Sozialproduktes der Wachstumsrate des Kapitals. Zur Bestimmung der Wachstumsrate des Kapitals wird zuerst der endogene Steuersatz berechnet.

Aus (3), (4), (13) und unter Berücksichtigung von  $x = B/K$  für die Schulden-Kapitalquote folgt<sup>6</sup>:

$$(14) \quad \tau = 1 - \frac{1 + d - g}{1 + \alpha x}.$$

Die zeitliche Entwicklung des Kapitalstocks ergibt sich aus (7) in Verbindung mit (6), (8), (9), (10) und (13) als

$$(15) \quad \dot{K} = Y[s(1 - \tau) - (g - \tau)] + rB(s - 1)(1 - \tau)$$

und die Wachstumsrate des Kapitals folgt aus der Division von (15) durch  $K$ , unter Berücksichtigung von (3), (4), (14) und von  $x = B/K$ :

$$(16) \quad \frac{\dot{K}}{K} = A[s(1 + d - g) - d].$$

Die Wachstumsrate des Kapitals ist konstant, da sie nur von exogenen Parametern abhängt. Daraus folgt, dass auch die Wachstumsrate des Outputs konstant ist.

Die Bewegungsgleichung der Staatsverschuldung ergibt sich aus (3), (4), (11), (13) und (14):

$$(17) \quad \dot{B} = AKd$$

und die Wachstumsrate der Staatsschulden, indem (17) durch  $B$  dividiert wird, als:

$$(18) \quad \frac{\dot{B}}{B} = A \frac{d}{x}.$$

Die Wachstumsrate der Staatsverschuldung ist genau dann konstant, wenn die Schulden-Kapitalquote  $x$  konstant ist.

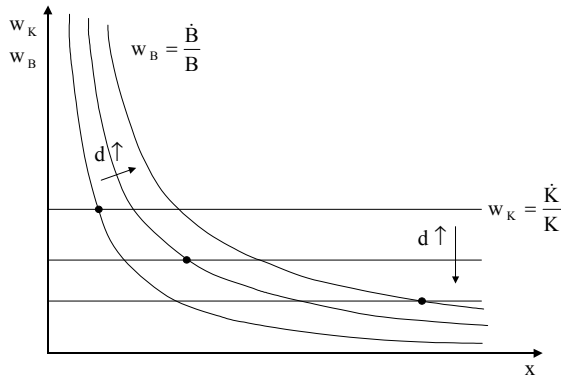
---

<sup>6</sup> Eine detailliertere Darstellung der Rechnungen erfolgt im Anhang.

Da der Staat das Ziel einer langfristig konstanten Schuldenquote,  $b = B/Y = \text{konstant}$ , verfolgt, müssen Staatsschulden und Sozialprodukt bzw. Kapital im Steady State mit gleicher Rate wachsen. Aus der Gleichsetzung von (16) und (18) folgt:

$$(19) \quad \frac{\dot{K}}{K} = A[s(1+d-g) - d] = A \frac{d}{x} = \frac{\dot{B}}{B}.$$

Die Wachstumsrate der Staatsschulden kann als Hyperbel dargestellt werden, während die Wachstumsrate des Kapitals von  $x$  unabhängig ist. Die Kurven der beiden Funktionen sind in Grafik 1 dargestellt. Dafür wurden folgende Ausprägungen der Parameter angenommen:  $A > 0$ ;  $g = 0,5$ ;  $s = 0,14$  und  $d = 0,03$  (bzw.  $0,05$  und  $0,07$ ).<sup>7</sup> Schnittpunkte beider Kurven für eine gegebene Defizitquote sind Steady States.



Grafik 1: Existenz von Wachstumsgleichgewichten

<sup>7</sup> Die Staatsquote  $g$  beträgt in Deutschland ungefähr 50% (Bundesministerium der Finanzen (2002)), die Sparquote  $s$  im Durchschnitt ca. 14% (Deutsche Bundesbank (2003)) und die aufgrund des Europäischen Stabilitätspaktes anvisierte Defizitquote  $d$  liegt bei 3% des BIP.

Für eine positive Defizitquote ( $d > 0$ ) und eine positive Schulden-Kapitalquote ( $x > 0$ )<sup>8</sup> ergibt sich immer genau dann ein Steady State, wenn die Wachstumsrate des Kapitals positiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn<sup>9</sup>

$$(20) \quad s(1 + d - g) > d,$$

da annahmegemäß  $A > 0$  ist.

Die gleichgewichtige Schulden-Kapitalquote  $x^*$  ergibt sich aus (19):

$$(21) \quad x^* = \frac{d}{s(1 + d - g) - d}.$$

*Folgerung:* Es gibt eine kritische Defizitquote  $d'$ <sup>10</sup>:

$$(22) \quad d' = \frac{s}{1-s}(1-g).$$

Wenn die Defizitquote  $d$  unter dem kritischen Wert liegt ( $d < d'$ ), gibt es einen Steady State, in dem Kapital und Staatsschulden mit der gleichen Rate wachsen und die Schulden-Kapitalquote konstant ist. Entspricht die Defizitquote dem kritischen Wert bzw. liegt sie darüber ( $d \geq d'$ ), dann gibt es keinen Steady State.

| <b>d</b>                              | <b>d<sub>0</sub> = 0,03</b> | <b>d<sub>1</sub> = 0,05</b> | <b>d<sub>2</sub> = 0,07</b> | <b>d' = 0,0814</b>   |
|---------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------|
| <b>w<sub>K</sub>(x;d)</b>             | 0,0442 A                    | 0,027 A                     | 0,0098 A                    | ≈ 0                  |
| <b>w<sub>B</sub>(x;d)</b>             | $\frac{0,03}{x}$ A          | $\frac{0,05}{x}$ A          | $\frac{0,07}{x}$ A          | $\frac{0,0814}{x}$ A |
| <b><math>x = \frac{d}{w_K}</math></b> | 0,6787                      | 1,8519                      | 7,1429                      | -                    |

Tabelle 1: Defizitquoten und Wachstumsraten

---

<sup>8</sup> Diese Annahmen sind sinnvoll, da hier einerseits nur der Fall staatlicher Verschuldung  $d > 0$ , und nicht staatlichen Sparens bzw. Entschuldens  $d < 0$ , betrachtet werden soll und andererseits  $x = B/K > 0$  ausdrückt, dass der Schuldenstand des Staates positiv ist, da  $K \geq 0$ . Für den Fall  $x = 0$  ist die Wachstumsrate der Staatsschulden nicht definiert.

<sup>9</sup>  $\frac{\dot{K}}{K} = A[s(1 + d - g) - d] > 0 \Leftrightarrow s(1 + d - g) - d > 0 \Leftrightarrow s(1 + d - g) > d$ .

<sup>10</sup>  $\frac{\dot{K}}{K} > 0 \Leftrightarrow s(1 + d - g) - d > 0 \Leftrightarrow s(1 - g) + d(s - 1) > 0 \Leftrightarrow s(1 - g) > d(1 - s) \Leftrightarrow d < \frac{s}{1-s}(1 - g)$  für  $s < 1$ .

Wie aus Tabelle 1 ersichtlich ist, liegt die kritische Defizitquote für gegebene Parameterkonstellation bei 8,14%. Ab dieser Defizitquote wachsen die Schulden immer stärker als das Kapital, die Schulden-Kapitalquote konvergiert gegen unendlich und der Kapitalstock reduziert sich kontinuierlich bis auf null. Eine fixe Defizitquote ist also nur so lange tragbar, wie der Kapitalstock mit positiver Rate wachsen kann.

Bei einem staatlichen Defizit ist die Wachstumsrate des Kapitals und damit des Outputs jedoch niedriger als ohne:

$$(23) \quad \frac{\dot{K}}{K} \Big|_{d>0} = A[s(1+d-g) - d] < A[s(1-g)] = \frac{\dot{K}}{K} \Big|_{d=0} .$$

## 4 Stabilität

Die Dynamik des Modells ist durch die Wachstumsraten von Kapital und Staatsschulden, d.h. den Gleichungen (16) und (18), vollständig beschrieben.

Im Gleichgewicht wachsen Kapital und Staatsschulden mit gleicher Rate und die Schulden-Kapitalquote ist konstant. Für die gleichgewichtige Schulden-Kapitalquote  $x^*$  gilt also  $\dot{x} = 0$ .

Es gilt  $x = B/K > 0$  und

$$(24) \quad \dot{x} = \frac{\dot{B}K - B\dot{K}}{K^2} = x \left( \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{K}}{K} \right) .$$

$\dot{x} = 0$  also genau dann, wenn die Wachstumsraten von Staatsschulden und Kapitalstock gleich sind:

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x \left( \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{K}}{K} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{B}}{B} = \frac{\dot{K}}{K} .$$

Ein Steady State ist stabil, wenn die Volkswirtschaft bei einer Abweichung vom Gleichgewicht nach einem exogenen Schock,  $\dot{x} \neq 0$ , wieder in Richtung des Gleichgewichtes,  $\dot{x} = 0$ , konvergiert.



Aus (24) folgt, dass wenn  $\frac{\dot{B}}{B} > \frac{\dot{K}}{K}$ , dann ist  $\dot{x} > 0$  und  $x$  steigt; ist hingegen  $\frac{\dot{B}}{B} < \frac{\dot{K}}{K}$ , so ist  $\dot{x} < 0$  und  $x$  sinkt.

$\frac{\dot{B}}{B} = A \frac{d}{x}$  ist genau dann größer (kleiner) als  $\frac{\dot{K}}{K} = A[s(1+d-g)-d]$ , wenn die Schulden-Kapitalquote  $x$  kleiner (größer) ist als der gleichgewichtige Wert  $x^* = \frac{d}{s(1+d-g)-d}$ .

*Beweis:*

$$A \frac{d}{x} > A[s(1+d-g)-d] \Leftrightarrow x < \frac{d}{s(1+d-g)-d} = x^*$$

bzw. 
$$A \frac{d}{x} < A[s(1+d-g)-d] \Leftrightarrow x > \frac{d}{s(1+d-g)-d} = x^*$$

für  $s(1+d-g)-d > 0$  (20). Das ist gleichbedeutend mit der Bedingung einer positiven Wachstumsrate des Kapitals (20). Nur dann kann ein Gleichgewicht existieren.

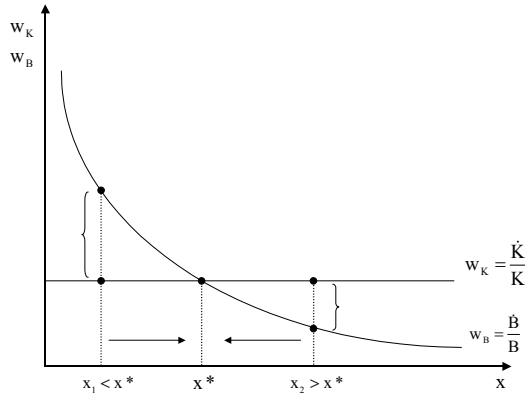
Somit ist die Bedingung für die Existenz eines Steady State auch eine hinreichende Bedingung für die Stabilität des Steady State.

Diese Aussagen werden anhand der folgenden Grafik verdeutlicht, die die Wachstumsraten der Staatsschulden ( $w_B$ ) und des Kapitals ( $w_K$ ) für den Fall, dass ein Steady State existiert ( $d < d'$ ), darstellt.

Wie aus Grafik 2 ersichtlich wird, ist die Wachstumsrate der Staatsschulden für  $x_1 < x^*$  größer als die Wachstumsrate des Kapitals. Somit erhöht sich die Schulden-Kapitalquote  $x = B/K$ , bis  $x^*$  erreicht ist. Für den Fall  $x_2 > x^*$  wächst das Kapital mit einer höheren Rate als die Staatsschulden, so dass  $x$  sinkt, bis  $x^*$  erreicht ist.

*Folgerung:* Der Steady State ist global asymptotisch stabil, da sich die Volkswirtschaft aus einer Situation des Ungleichgewichtes ( $x \neq x^*$ ) wieder zum Gleichgewicht ( $x = x^*$ ) hin bewegt.

Unter den getroffenen Annahmen existiert also ein eindeutiger und stabiler Steady State mit positiver Defizitquote bei entsprechender Parameterkonstellation (d, s und g).



Grafik 2: Stabilität des Steady State

Diese Erkenntnisse stehen im Gegensatz zu Bräuninger (2002), der zwei Steady States beschreibt, von denen der eine lokal stabil und der andere instabil ist. Dieser Unterschied basiert auf unterschiedlichen Wachstumsraten des Kapitals, die auf divergierende Annahmen zum Sparverhalten zurückzuführen sind.

Bräuninger leitet die gesamtwirtschaftliche Ersparnis als  $S = (1 - t)\beta\delta Y$  her, in der hier verwendeten Notation  $S = (1 - \tau)\beta sY$  mit  $\beta$  als Lohnquote<sup>11</sup>,  $0 \leq \beta \leq 1$ , die unabhängig von  $B$  ist.

In der vorliegenden Arbeit ist die Ersparnis definiert als  $S = sY^v = s(1 - \tau)(Y + rB)$ , vgl. (8) bis (10). Daraus folgt sofort, dass die Ersparnis bei Bräuninger niedriger ist, da nur ein der Sparquote entsprechender Teil des Nach-Steuer-Lohneinkommens  $((1 - \tau)\beta Y)$  und nicht des gesamten Nach-Steuer-Einkommens  $((1 - \tau)Y \geq (1 - \tau)\beta Y)$  und nichts von den Zinseinkünften ( $rB$ ) gespart wird. Demnach ist auch das Wachstum des Kapi-

<sup>11</sup> (5):  $w = \beta Y / N \Leftrightarrow \beta = wN / Y$

talstockes niedriger, da sich der Kapitalstock maximal in Höhe der gesamtwirtschaftlichen Ersparnis erhöhen kann,  $\dot{K} = I = S - D$ , vgl. (6) und (7).

Die Wachstumsrate des Kapitals hängt bei Bräuninger negativ von  $x = B/K$  ab, während sie in dieser Arbeit konstant und unabhängig von  $x$  ist. Dies kann über die Auswirkungen einer Erhöhung des staatlichen Schuldenstandes  $B$  (das entspricht bei konstantem Kapitalstock einem höheren  $x$ ) erklärt werden.

Der staatliche Schuldenstand  $B$  hat einen gleichgerichteten Einfluss auf den Steuersatz, der in beiden Arbeiten, abgesehen von der Notation, gleich ist:

$$(25) \quad \frac{\partial \tau}{\partial B} = \frac{1 + d - g}{(1 + \alpha x)^2} \frac{\alpha}{K} > 0.$$

Bei Bräuninger (2002) wirkt sich eine Erhöhung der Staatsschulden implizit über einen höheren Steuersatz negativ auf das Sparverhalten aus,  $\partial S / \partial B < 0$ , während im vorliegenden Modell einer Erhöhung der Staatsschulden die gesamtwirtschaftliche Ersparnis unverändert lässt: zwar reduziert sich die Ersparnis durch die Erhöhung des Steuersatzes, dieser Effekt wird jedoch durch die steigenden Zinseinkünfte ( $rB$ ) vollständig ausgeglichen<sup>12</sup>:  $\partial S / \partial B = 0$ .

## 5 Komparativ-statische Analyse

Ausgangspunkt einer komparativ-statischen Analyse ist der stabile Steady State, denn nur dann ist gewährleistet, dass die Volkswirtschaft auch wieder zum Gleichgewicht tendiert. Gegenstand der Analyse sind Parameteränderungen und deren Auswirkungen auf das Gleichgewicht bzw. die Anpassung an ein neues Gleichgewicht. Zuerst werden die Auswirkungen einer Erhöhung der Defizit-, der Spar- bzw. der Staatsquote und eines technologischen Schocks auf die Wachstumsraten von Kapital und Staatsschulden, danach auf den Steuersatz  $\tau$  betrachtet.

---

<sup>12</sup> Im Anhang ist die Ableitung ausführlich dargestellt.

Das anfängliche Gleichgewicht  $x^*$ , in dem Output und Kapital mit der gleichen Rate wachsen wie die Staatsschulden, ist als Punkt 1 in Grafik 3 gekennzeichnet.

### 5.1 Erhöhung der Defizitquote

Der exogene Schock tritt nun in Form einer Erhöhung der Defizitquote ein. Infolgedessen verschiebt sich die Kurve der Wachstumsrate des Kapitals ( $w_K$ ) nach unten und die Kurve der Wachstumsrate der Staatsschulden ( $w_B$ ) nach rechts oben:

$$(26.1) \quad \frac{\partial(\dot{K}/K)}{\partial d} = A(s-1) < 0 \quad \text{für } s < 1$$

und

$$(26.2) \quad \frac{\partial(\dot{B}/B)}{\partial d} = \frac{A}{x} > 0.$$

Kurzfristig (bei gleichem  $x$ ) führt eine Erhöhung der Defizitquote zu einem erhöhten Wachstum der Staatsschulden (Punkt 2) und zu einem verringerten Wachstum des Kapitals (Punkt 3) und damit des Outputs.

Mittelfristig bewirkt dies einen Anstieg der Schulden-Kapitalquote  $x$ :

$$(27) \quad \frac{\partial x^*}{\partial d} = \frac{1}{s(1+d-g)-d} - \frac{d(s-1)}{(s(1+d-g)-d)^2} > 0.$$

Das wiederum hat zur Folge, dass sich die Wachstumsrate der Staatsschulden reduziert, während das Kapital weiter mit der neuen niedrigeren Rate wächst:

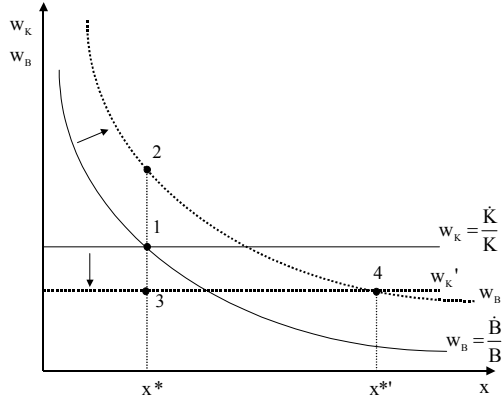
$$(28.1) \quad \frac{\partial(\dot{B}/B)}{\partial x} = -A \frac{d}{x^2} < 0$$

und

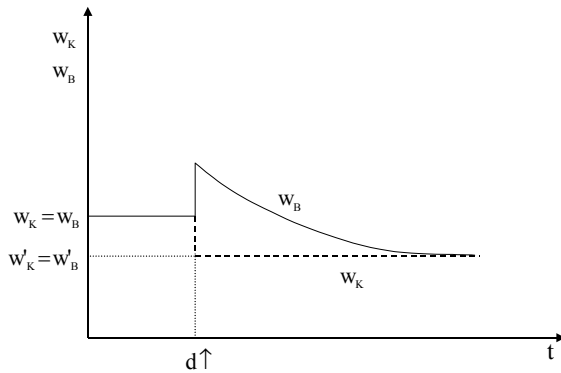
$$(28.2) \quad \frac{\partial(\dot{K}/K)}{\partial x} = 0.$$

Langfristig nähert sich die Wachstumsrate der Staatsschulden wieder an die Wachstumsrate des Kapitals an, bis  $w_B = w_K$  (Punkt 4) und damit  $\dot{x} = 0$  gilt. Im Vergleich zum alten Gleichgewicht wachsen Kapital und Staatsschulden mit einer niedrigeren

Rate. Die gleichgewichtige Schulden-Kapitalquote steigt auf  $x^{*'}$ . Grafik 4 stellt die zeitliche Veränderung der Wachstumsraten von B und K nach dem exogenen Schock dar.



Grafik 3: Erhöhung der Defizitquote



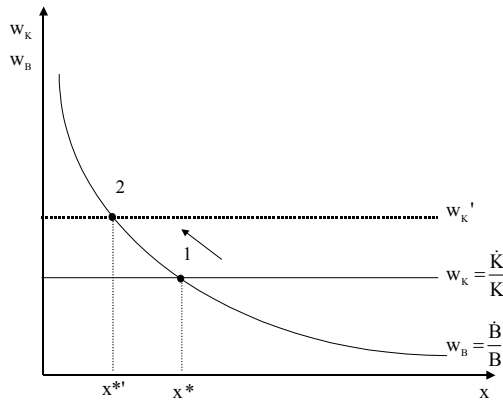
Grafik 4: Zeitpfade der Wachstumsraten von Kapital und Staatsschulden

## 5.2 Erhöhung der Sparquote

Bei einer exogenen Erhöhung der Sparquote  $s$  verschiebt sich die Kurve der Wachstumsrate des Kapitals nach oben, während die Wachstumsrate der Staatsschulden unverändert ist:

$$(29.1) \quad \frac{\partial(\dot{K}/K)}{\partial s} = A(1+d-g) > 0 \quad \text{und}$$

$$(29.2) \quad \frac{\partial(\dot{B}/B)}{\partial s} = 0.$$



Grafik 5: Erhöhung der Sparquote

Die neue gleichgewichtige Schulden-Kapitalquote  $x^*$  ist niedriger:

$$(30) \quad \frac{\partial x^*}{\partial s} = -\frac{d(1+d-g)}{(s(1+d-g)-d)^2} < 0$$

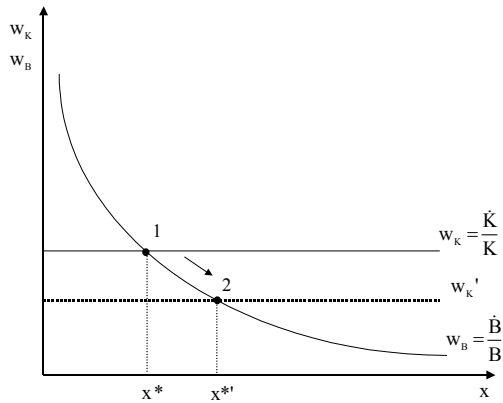
und infolgedessen sind gemäß (28.1) und (28.2) die Wachstumsraten von  $B$  und  $K$  im neuen Gleichgewicht höher als in der Ausgangssituation.

### 5.3 Erhöhung der Staatsquote

Bei einer exogenen Erhöhung der Staatsquote  $g$  verschiebt sich  $w_K$  nach unten,  $w_B$  verändert sich nicht:

$$(31.1) \quad \frac{\partial(\dot{K}/K)}{\partial g} = -As < 0 \quad \text{und}$$

$$(31.2) \quad \frac{\partial(\dot{B}/B)}{\partial g} = 0.$$



Grafik 6: Erhöhung der Staatsquote

Bei einer höheren gleichgewichtigen Schulden-Kapitalquote  $x^*$  als im alten Gleichgewicht:

$$(32) \quad \frac{\partial x^*}{\partial g} = \frac{ds}{(s(1+d-g)-d)^2} > 0$$

wachsen im neuen Gleichgewicht Staatsschulden und Kapital mit einer niedrigeren Rate ((28.1) und (28.2)).

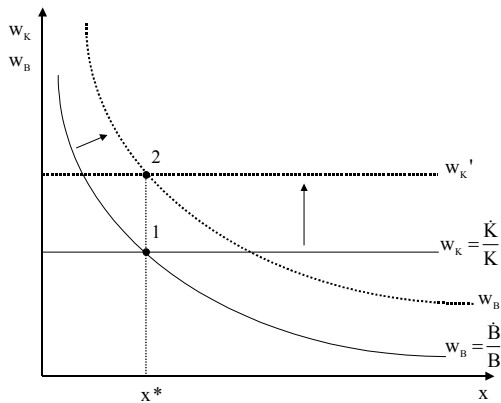
### 5.4 Positiver technologischer Schock

Eine Erhöhung des Technologieparameters A erhöht sowohl die Wachstumsrate des Kapitals als auch die der Staatsschulden:

$$(33.1) \quad \frac{\partial(\dot{K}/K)}{\partial A} = s(1+d-g) - d > 0 \quad \text{und}$$

$$(33.2) \quad \frac{\partial(\dot{B}/B)}{\partial A} = \frac{d}{x} > 0$$

derart, dass die Wachstumsraten im neuen Gleichgewicht höher sind, sich die gleichgewichtige Schulden-Kapitalquote  $x^*$  aber nicht ändert.



Grafik 7: Positiver technologischer Schock

In Abhängigkeit von der Art des exogenen Schocks verändert sich die Lage der Kurve einer oder beider Wachstumsraten. Aber unabhängig davon passt sich langfristig immer die Wachstumsrate der Schulden an die Wachstumsrate des Kapitals über eine Änderung der Schulden-Kapitalquote an.



## 5.5 Auswirkungen auf den Steuersatz

Der Steuersatz  $\tau$  beeinflusst die Wachstumsraten des Sozialproduktes und der Staatsschulden nicht, er ändert sich jedoch endogen mit den Parametern.

Gemäß (14) ergibt sich der Steuersatz als:

$$\tau = 1 - \frac{1 + d - g}{1 + \alpha x}.$$

Wenn die Defizitquote erhöht wird, sinkt der Steuersatz:

$$(34) \quad \frac{\partial \tau}{\partial d} = -\frac{1}{1 + \alpha x} < 0,$$

er steigt bei einer Erhöhung der Staatsquote:

$$(35) \quad \frac{\partial \tau}{\partial g} = \frac{1}{1 + \alpha x} > 0$$

und verändert sich nicht, wenn die Sparquote oder der Technologieparameter variiert werden. Eine Änderung der Produktionselastizität des Kapitals  $\alpha$  hingegen führt zu einer gleichgerichteten Änderung des Steuersatzes. Bei oben gegebener Parameterkonstellation ergibt sich ein Steuersatz in Höhe von 57,4% für  $\alpha = 0,36$  (Maußner, Klump (1996), S.10).

## 6 Schlussbetrachtung

In dem betrachteten Modell hängen Kapital- und Staatsschuldenwachstum von der Defizitquote ab, aber während die Wachstumsrate des Kapitals konstant und unabhängig von der Schulden-Kapitalquote ist, ist das Wachstum des staatlichen Schuldenstandes nur bei einer unveränderten Schulden-Kapitalquote konstant. Es gibt jedoch eine kritische Defizitquote  $d^*$ . Nur für Defizitquoten unterhalb des kritischen Wertes gibt es einen Steady State, in dem Kapital und Staatsschulden mit gleicher Rate wachsen und die Schulden-Kapitalquote konstant ist. Wird die kritische Defizitquote überschritten, gibt es keinen Steady State, die Schulden-Kapitalquote wächst gegen unendlich und der Ka-

pitalstock reduziert sich langfristig auf null. Ist die Bedingung für die Existenz eines Steady State erfüllt, ist damit auch unmittelbar seine Stabilität gesichert.

In einer komparativ-statischen Analyse konnte gezeigt werden, dass sich die Wachstumsrate der Volkswirtschaft bei einer Erhöhung von Defizit- oder Staatsquote verringert, während sie im Falle einer erhöhten Sparquote oder eines positiven technologischen Schocks steigt.

Die AK-Technologie hat wichtige Implikationen bezüglich der Wohlfahrtseffekte staatlicher Finanzpolitik. Im neoklassischen Modell ist eine Überakkumulation von Kapital möglich, die zu einer dynamischen Ineffizienz führt (Zins  $<$  Wachstumsrate des Sozialproduktes). Eine Erhöhung des langfristigen Konsums kann durch eine Reduzierung des Kapitalstocks z.B. über staatliche Verschuldung erreicht werden. Bei AK-Technologie hingegen ist eine solche dynamische Ineffizienz nicht möglich, da das Grenzprodukt des Kapitals und damit der Zins konstant und unabhängig von der Höhe des Kapitalstocks ist und eine höhere Sparquote die Wachstumsrate des Outputs erhöht. (Aghion, Howitt (1998))

Um die Qualität der Modellaussagen bezüglich ihrer Relevanz beurteilen zu können, müssen empirische Untersuchungen zu Rate gezogen werden. So bleibt offen, inwiefern eine AK-Produktionsstruktur die Gegebenheiten in Deutschland zu beschreiben vermag und welchen Wert der Technologieparameter A gegebenenfalls annehmen würde. Eine fixe Defizitquote ist bis zu einem kritischen Wert tragbar. Aber welche Wachstumsrate der deutschen Wirtschaft bei gegebener Parameterkonstellation für die Maastrichter-Defizitquote von 3% zuzuordnen ist, kann nur für einen empirisch fundierten Wert des Technologieparameters A bestimmt werden<sup>13</sup>.

Im vorliegenden Modell ist die Wachstumsrate der Volkswirtschaft einerseits durch länderspezifische Parameter wie die Sparquote und das Technologieniveau und andererseits durch finanzpolitische Instrumente wie die Defizit- und die Staatsquote determiniert. Empirisch beobachtbare Differenzen in den Wachstumsraten verschiedener Länder lassen sich in diesem Modell somit über Ländercharakteristika oder unterschiedliche staatliche Finanzpolitiken erklären.

---

<sup>13</sup> Für Daten der US-amerikanischen Wirtschaft im Zeitraum von 1889-1933 wurde ein Technologieparameter von 0,321 geschätzt (Frankel (1962)). Unter der Annahme einer vergleichbaren Ausprägung für A in Deutschland läge die Wachstumsrate für obige Parameter bei 1,42%, ein nicht abwegiger Wert.

In dieser Arbeit wurde angenommen, dass der Staat bei gegebener Staatsquote die Defizitquote fixiert und den Steuersatz gemäß der Budgetrestriktion anpasst. In der Realität hingegen ist eher der umgekehrte Fall zu beobachten: es gibt ein festes Steuersystem und die Defizite ergeben sich aus der Budgetbeschränkung.<sup>14</sup> Die Maastricht-Kriterien sind auch nicht als feste Vorgabe, sondern als Referenzwerte bzw. Obergrenzen zu verstehen. Die Annahme einer konstanten Staatsquote ist realistisch, da sie empirisch beobachtbar ist. (Bundesministerium der Finanzen (2002))

Es wurde zusätzlich davon ausgegangen, dass die staatlichen Ausgaben ausschließlich konsumtiven Charakter haben, so dass sie keinen Beitrag zur Erhöhung des gesamtwirtschaftlichen Kapitalstocks leisten. Die Einführung investiver Staatsausgaben wäre eine interessante Erweiterungsmöglichkeit.

Des Weiteren ist die betrachtete Ökonomie geschlossen, obwohl gerade Länder wie Deutschland dadurch gekennzeichnet sind, dass sie offene Volkswirtschaften darstellen. Darüber hinaus spielt die Auslandsverschuldung eine immer größere Bedeutung, nicht nur für Schwellen- und Entwicklungsländer. Es ist zu erwarten, dass die Lockerung dieser Annahme weitreichende Folgen auf die Ergebnisse des Modells hätte, es aber vor allem sehr viel komplexer würde.

---

<sup>14</sup> Der hier verwendete Modellansatz wird von Bräuninger (2003) auch mit fixem Steuersatz und flexibler Defizitquote analysiert.

## Literaturverzeichnis

Aghion, Philippe und Peter Howitt (1998), „*Endogenous Growth Theory*“, The MIT Press, Cambridge (MA).

Arrow, Kenneth J. (1962), „The Economic Implications of Learning by Doing“, in: *Review of Economic Studies*, 29, S.155-173.

Barro, Robert J. und Xavier Sala-i-Martin (1995), „*Economic growth*“, McGraw-Hill Inc., USA.

Bräuninger, Michael (2002), „The Budget Deficit, Public Debt and Endogenous Growth“, *Diskussionsbeiträge* aus dem Institut für Theoretische Volkswirtschaftslehre /02, Universität der Bundeswehr Hamburg, Internetversion vom 8.April 2003, <http://www.unibw-hamburg.de/WWEB/vwl/carlberg/mb/over-paper-final.pdf>.

Bräuninger, Michael (2003), „*Public Debt and Endogenous Growth*“, Physica-Verlag, Heidelberg.

Bundesministerium der Finanzen (2002), *Bundshaushalt 2003*.

Deutsche Bundesbank (2003), *Monatsbericht Mai*.

Europäische Kommission (2004), *Public Finances in EMU 2004*, Internetversion vom 28.Juni 2004, [http://europa.eu.int/comm/economy\\_finance/publications/european\\_economy/2004/ee604en.pdf](http://europa.eu.int/comm/economy_finance/publications/european_economy/2004/ee604en.pdf).

Frankel, Marvin (1962), „The Production Function in Allocation and Growth: A Synthesis“, in: *American Economic Review* 52, S.995-1022.

Kurz, Mordecai (1968), „The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes“, in: *Review of Economic Studies* 35, S.155-174.

Mankiw, N. Gregory, David Romer und David N. Weil (1992), „A contribution to the empirics of economic growth“, in: *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 107, S.407-437.

Maußner, Alfred und Rainer Klump (1996), „*Wachstumstheorie*“, Springer Verlag, Berlin.

Rebello, Sergio (1991), „Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth“, in: *Journal of Political Economy*, Vol.99, S.500-521.

Romer, Paul M. (1986), „Increasing Returns and Long-Run Growth“, in: *Journal of Political Economy*, Vol.94, S.1002-1037.

Solow, Robert M. (1956), „A contribution to the theory of economic growth“ in: *Quarterly Journal of Economics*, Vol.70, S.65-94.

Wenzel, H.-Dieter (1986), „Öffentliche Investitionen und öffentliche Kreditaufnahme im Wachstumsgleichgewicht“, in: *Kredit und Kapital*, Vol.19, S.496-521.

Wenzel, H.-Dieter (1994a), „Existence and Stability of Growth Equilibria – A graphical analysis of steady states in a closed economy with government activity“, in: Augsburg, Walter und Klaus Schwab (Hrsg.), „*Using Formalism and Semi-Formal Constructs for Modeling Information Systems*“, Otto-Friedrich-Universität Bamberg, S.72-85.

Wenzel, H.-Dieter (1994b), „Staat und Wachstum: Grundlegende Zusammenhänge zwischen staatlicher Aktivität und gesamtwirtschaftlicher Kapitalbildung“, in: Engelhard, Johann und Heinz Rehkugler (Hrsg.), „*Strategien für nationale und internationale Märkte - Konzepte und praktische Gestaltung*“, Wiesbaden, S.351-378.

Wenzel, H.-Dieter und Matthias Wrede (1993), „Golden Rule Fiscal Policy“, in: *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik* 129, S.123-150.

Wenzel, H.-Dieter und Matthias Wrede (2000), „Public Debt in a Federation – Growth and Stability“, in: *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 220/1, S.95-107.

## Anhang

### Zu den Berechnungen von Steuersatz und Wachstumsraten

#### 1. Steuersatz $\tau$

Aus (13)  $dY = (g - \tau)Y + (1 - \tau)rB$

folgt  $\tau = \frac{(g - d)Y + rB}{Y + rB},$

unter Beachtung von  $Y = AK$  (3),  $r = \alpha A$  (4) und  $x = B/K$  ergibt sich

$$\tau = \frac{(g - d)Y + \alpha AB}{Y + \alpha AB} = \frac{(g - d) + \alpha \frac{Y}{K} \frac{B}{Y}}{1 + \alpha \frac{Y}{K} \frac{B}{Y}}$$

(14)  $\tau = 1 - \frac{1 + d - g}{1 + \alpha x}.$

#### 2. Zeitliche Entwicklung des Kapitalstocks $\dot{K}$

Aus (7) und (6)  $\dot{K} = I - S - D$

folgt mit (8), (9), (10) und (13):

$$\dot{K} = s[Y + rB - \tau(Y + rB)] - [(g - \tau)Y + (1 - \tau)rB]$$

(15)  $\dot{K} = Y[s(1 - \tau) - (g - \tau)] + rB(s - 1)(1 - \tau).$

### 3. Wachstumsrate des Kapitals $\frac{\dot{K}}{K}$

Indem (15) durch K dividiert wird, ergibt sich

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{Y}{K} [s(1-\tau) - (g-\tau)] + r \frac{B}{K} (s-1)(1-\tau)$$

und unter Beachtung von  $Y = AK$  (3),  $r = \alpha A$  (4),  $x = B/K$  und (14) folgt:

$$\frac{\dot{K}}{K} = A \left[ s \frac{1+d-g}{1+\alpha x} - \left( g-1 + \frac{1+d-g}{1+\alpha x} \right) \right] + \alpha A x \left[ (s-1) \frac{1+d-g}{1+\alpha x} \right].$$

Durch weitere Umformungen:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}}{K} &= A \left[ (s-1) \frac{1+d-g}{1+\alpha x} + (1-g) + \alpha x (s-1) \frac{1+d-g}{1+\alpha x} \right] = \\ &= A \left[ (s-1)(1+\alpha x) \frac{1+d-g}{1+\alpha x} + (1-g) \right] = A [(s-1)(1+d-g) + (1-g)] \end{aligned}$$

gelangt man schließlich zu Gleichung (16):

$$(16) \quad \frac{\dot{K}}{K} = A [s(1+d-g) - d].$$

### 4. Bewegungsgleichung der Staatsverschuldung $\dot{B}$

Aus (11) und (13) folgt:

$$\dot{B} = D = (g-\tau)Y + (1-\tau)rB$$

und unter Verwendung von  $r = \alpha A$  (4) und (14):

$$\dot{B} = \left[ g-1 + \frac{1+d-g}{1+\alpha x} \right] Y + \frac{1+d-g}{1+\alpha x} \alpha A B.$$

Bei Einbeziehung von  $Y = AK$  (3) und  $x = B/K$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \frac{g\alpha x - \alpha x + d}{1+\alpha x} Y + \frac{1+d-g}{1+\alpha x} \alpha \frac{Y}{K} B = \\ &= Y \left[ \frac{\alpha x(g-1) + d}{1+\alpha x} + \frac{1+d-g}{1+\alpha x} \alpha x \right] \end{aligned}$$

und nach weiteren Umformungen:

$$\dot{B} = Y \left[ \frac{\alpha x d + d}{1 + \alpha x} \right] = Y \left[ \frac{d(1 + \alpha x)}{1 + \alpha x} \right]$$

folgt

$$(17) \quad \dot{B} = AKd.$$

### 5. Auswirkungen einer Erhöhung der Staatsschulden auf die Ersparnis

Aus (8), (9) und (10) folgt:

$$S = s(1 - \tau)(Y + rB).$$

Gemäß der Produkt- und Kettenregel ergibt sich die partielle Ableitung der Ersparnis nach dem staatlichen Schuldenstand B als:

$$\frac{\partial S}{\partial B} = -s \frac{\partial \tau}{\partial B} (Y + rB) + s(1 - \tau)r.$$

Nach Einsetzen von  $Y = AK$  (3),  $r = \alpha A$  (4),  $x = B/K$  und  $\frac{\partial \tau}{\partial B} = \frac{1 + d - g}{(1 + \alpha x)^2} \frac{\alpha}{K}$  (25) kann

der Ausdruck vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial B} &= -s \frac{1 + d - g}{(1 + \alpha x)^2} \frac{\alpha}{K} (Y + rB) + s \frac{1 + d - g}{1 + \alpha x} r \\ &= s \frac{1 + d - g}{1 + \alpha x} \left[ -\frac{\alpha(Y + rB)}{(1 + \alpha x)K} + \alpha A \right] \\ &= s \frac{1 + d - g}{1 + \alpha x} \left[ \frac{-\alpha(AK + \alpha AB) + \alpha(AK + \alpha AB)}{(1 + \alpha x)K} \right] \\ &\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial B} = 0 \end{aligned}$$





## BERG Working Paper Series on Government and Growth

---

- 1 Mikko **Puhakka** and Jennifer P. **Wissink**, Multiple Equilibria and Coordination Failure in Cournot Competition, December 1993
- 2 Matthias **Wrede**, Steuerhinterziehung und endogenes Wachstum, December 1993
- 3 Mikko **Puhakka**, Borrowing Constraints and the Limits of Fiscal Policies, May 1994
- 4 Gerhard **Illing**, Indexierung der Staatsschuld und die Glaubwürdigkeit der Zentralbank in einer Währungsunion, June 1994
- 5 Bernd **Hayo**, Testing Wagner's Law for Germany from 1960 to 1993, July 1994
- 6 Peter **Meister** and Heinz-Dieter **Wenzel**, Budgetfinanzierung in einem föderalen System, October 1994
- 7 Bernd **Hayo** and Matthias **Wrede**, Fiscal Policy in a Keynesian Model of a Closed Monetary Union, October 1994
- 8 Michael **Betten**, Heinz-Dieter **Wenzel**, and Matthias **Wrede**, Why Income Taxation Need Not Harm Growth, October 1994
- 9 Heinz-Dieter **Wenzel** (Editor), Problems and Perspectives of the Transformation Process in Eastern Europe, August 1995
- 10 Gerhard **Illing**, Arbeitslosigkeit aus Sicht der neuen Keynesianischen Makroökonomie, September 1995
- 11 Matthias **Wrede**, Vertical and horizontal tax competition: Will uncoordinated Leviathans end up on the wrong side of the Laffer curve? December 1995
- 12 Heinz-Dieter **Wenzel** and Bernd **Hayo**, Are the fiscal Flows of the European Union Budget explainable by Distributional Criteria? June 1996
- 13 Natascha **Kuhn**, Finanzausgleich in Estland: Analyse der bestehenden Struktur und Überlegungen für eine Reform, June 1996
- 14 Heinz-Dieter **Wenzel**, Wirtschaftliche Entwicklungsperspektiven Turkmenistans, July 1996
- 15 Matthias **Wrede**, Öffentliche Verschuldung in einem föderalen Staat; Stabilität, vertikale Zuweisungen und Verschuldungsgrenzen, August 1996

- 16 Matthias **Wrede**, Shared Tax Sources and Public Expenditures, December 1996
- 17 Heinz-Dieter **Wenzel** and Bernd **Hayo**, Budget and Financial Planning in Germany, February 1997
- 18 Heinz-Dieter **Wenzel**, Turkmenistan: Die ökonomische Situation und Perspektiven wirtschaftlicher Entwicklung, February 1997
- 19 Michael **Nusser**, Lohnstückkosten und internationale Wettbewerbsfähigkeit: Eine kritische Würdigung, April 1997
- 20 Matthias **Wrede**, The Competition and Federalism - The Underprovision of Local Public Goods, September 1997
- 21 Matthias **Wrede**, Spillovers, Tax Competition, and Tax Earmarking, September 1997
- 22 Manfred **Dauses**, Arsène **Verny**, Jiri **Zemánek**, Allgemeine Methodik der Rechtsangleichung an das EU-Recht am Beispiel der Tschechischen Republik, September 1997
- 23 Niklas **Oldiges**, Lohnt sich der Blick über den Atlantik? Neue Perspektiven für die aktuelle Reformdiskussion an deutschen Hochschulen, February 1998
- 24 Matthias **Wrede**, Global Environmental Problems and Actions Taken by Coalitions, May 1998
- 25 Alfred **Maußner**, Außengeld in berechenbaren Konjunkturmodellen – Modellstrukturen und numerische Eigenschaften, June 1998
- 26 Michael **Nusser**, The Implications of Innovations and Wage Structure Rigidity on Economic Growth and Unemployment: A Schumpetrian Approach to Endogenous Growth Theory, October 1998
- 27 Matthias **Wrede**, Pareto Efficiency of the Pay-as-you-go Pension System in a Three-Period-OLG Modell, December 1998
- 28 Michael **Nusser**, The Implications of Wage Structure Rigidity on Human Capital Accumulation, Economic Growth and Unemployment: A Schumpeterian Approach to Endogenous Growth Theory, March 1999
- 29 Volker **Treier**, Unemployment in Reforming Countries: Causes, Fiscal Impacts and the Success of Transformation, July 1999
- 30 Matthias **Wrede**, A Note on Reliefs for Traveling Expenses to Work, July 1999
- 31 Andreas **Billmeier**, The Early Years of Inflation Targeting – Review and Outlook –, August 1999

- 32 Jana **Kremer**, Arbeitslosigkeit und Steuerpolitik, August 1999
- 33 Matthias **Wrede**, Mobility and Reliefs for Traveling Expenses to Work, September 1999
- 34 Heinz-Dieter **Wenzel** (Herausgeber), Aktuelle Fragen der Finanzwissenschaft, February 2000
- 35 Michael **Betten**, Household Size and Household Utility in Intertemporal Choice, April 2000
- 36 Volker **Treier**, Steuerwettbewerb in Mittel- und Osteuropa: Eine Einschätzung anhand der Messung effektiver Grenzsteuersätze, April 2001
- 37 Jörg **Lackenbauer** und Heinz-Dieter **Wenzel**, Zum Stand von Transformations- und EU-Beitrittsprozess in Mittel- und Osteuropa – eine komparative Analyse, May 2001
- 38 Bernd **Hayo** und Matthias **Wrede**, Fiscal Equalisation: Principles and an Application to the European Union, December 2001
- 39 Irena Dh. **Bogdani**, Public Expenditure Planning in Albania, August 2002
- 40 Tineke **Haensgen**, Das Kyoto Protokoll: Eine ökonomische Analyse unter besonderer Berücksichtigung der flexiblen Mechanismen, August 2002
- 41 Arben **Malaj** and Fatmir **Mema**, Strategic Privatisation, its Achievements and Challenges, Januar 2003
- 42 Borbála **Szüle** 2003, Inside financial conglomerates, Effects in the Hungarian pension fund market, January 2003
- 43 Heinz-Dieter **Wenzel** und Stefan **Hopp** (Herausgeber), Seminar Volume of the Second European Doctoral Seminar (EDS), February 2003
- 44 Nicolas Henrik **Schwarze**, Ein Modell für Finanzkrisen bei Moral Hazard und Überinvestition, April 2003
- 45 Holger **Kächelein**, Fiscal Competition on the Local Level – May commuting be a source of fiscal crises?, April 2003
- 46 Sibylle **Wagner**, Fiskalischer Föderalismus – Theoretische Grundlagen und Studie Ungarns, August 2003
- 47 Stefan **Hopp**, J.-B. Say's 1803 *Treatise* and the Coordination of Economic Activity, July 2004
- 48 Julia **Bersch**, AK-Modell mit Staatsverschuldung und fester Defizitquote, July 2004