

Klausur in Wirtschaftsmathematik I und II

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Eine Anfangsschuld von $K_0 = 10.000,00\text{€}$ soll als Annuitätenschuld mit einem Zinsfuß von $p = 7\%$ und einer Laufzeit von $n = 3$ Jahren getilgt werden.

Berechnen Sie die konstante Annuität und stellen Sie den Tilgungsplan auf. (4 Punkte)

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = e^x$ das Taylorpolynom vom Grad $n = 7$ ($x_0 = 0$).

Bestimmen Sie seinen Wert an der Stelle $x = -2$. Schätzen Sie durch die Berechnung des Restgliedes ab, wie genau $f(-2) = e^{-2}$ durch diesen Wert approximiert wird. (5 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3 \cdot x_2^2 - x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3$$

a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Konvexität/Konkavität.

b) Berechnen Sie die Extremstelle von f und begründen Sie, warum es sich dabei um das globale Extremum von f handelt. (6 Punkte)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes das Minimum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0.$$

Geben Sie eine kurze geometrische Interpretation dieses Minimierungsproblems. (5 Punkte)

Aufgabe 5

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$. (5 Punkte)

Aufgabe 6

Für welche der Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist der Ausdruck

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A_i \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ definiert ($i = 1, 2, 3$, Begründung!). Berechnen Sie den Ausdruck gegebenenfalls. (4 Punkte)

Seite 2 beachten!

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Geben Sie Definitions- und Wertebereich der zugehörigen linearen Abbildung $\tilde{A}$ an.
- Berechnen Sie den Rang dieser Matrix.
- Ist die zur Matrix A gehörige lineare Abbildung injektiv oder surjektiv? (4 Punkte)

Aufgabe 8

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 1$$

$$a \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 = 2$$

$$2 \cdot x_1 + a \cdot x_3 = 2$$

- Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist dieses System eindeutig lösbar?
- Im Fall der eindeutigen Lösbarkeit bestimmen Sie die erste Komponente des Lösungsvektors mit Hilfe der CRAMERSchen Regel.
- Überprüfen Sie die Lösbarkeit dieses Systems für die beiden Fälle $a = 2, b \neq 0$ und $a = -2, b \neq 0$. Bestimmen Sie gegebenenfalls die allgemeine Lösung. (7 Punkte)

Aufgabe 9

Bestimmen Sie rechnerisch mit Hilfe des Simplexalgorithmus für normale lineare Programme das Maximum der Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ und

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 4.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5 Punkte)