

Klausur in Wirtschaftsmathematik I und II

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Eine Anfangsschuld von $K_0 = 15.000$ € soll als Annuitätenschuld bei einem Zinsfuß von 7% und einer Laufzeit von 6 Jahren getilgt werden.

- a) Berechnen Sie die konstante Annuität und die Restschuld zu Beginn des 5. Jahres.
- b) Stellen Sie den Tilgungsplan für die beiden letzten Jahre der Laufzeit auf. (4 Punkte)

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = e^x$ das Taylorpolynom vom Grad $n = 6$ ($x_0 = 0$).

Bestimmen Sie seinen Wert an der Stelle $x = -1$. Schätzen Sie durch die Berechnung des Restgliedes ab, wie genau $f(-1) = e^{-1} = 1/e$ durch diesen Wert approximiert wird. (5 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 - x_3^2 + x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3$$

- a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Konvexität/Konkavität.
- b) Berechnen Sie die Extremstelle von f und begründen Sie, warum es sich dabei um das globale Extremum von f handelt. (6 Punkte)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes das Minimum der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ unter den Nebenbedingungen $x_1 \cdot x_2 - 1 = 0$ und $x \geq 0$. Geben Sie eine kurze geometrische Interpretation dieses Optimierungsproblems. (5 Punkte)

Aufgabe 5

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 x \cdot e^x dx$. (5 Punkte)

Aufgabe 6

Für welche der Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist der Ausdruck

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ definiert ($i = 1, 2, 3$, Begründung!). Berechnen Sie den Ausdruck

gegebenenfalls. (4 Punkte)

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix und geben Sie an ob die zugehörige lineare Abbildung injektiv und/oder surjektiv ist. (4 Punkte)

Aufgabe 8

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 & -4 & 5 \\ -12 & -2 & 14 & 9 & -11 \\ -7 & -2 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass jedes lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix A lösbar, aber nicht eindeutig lösbar ist.
- b) Bestimmen Sie die vollständige Basislösung und die allgemeine Lösung dieses Systems mit den Basisvariablen x_2 , x_3 und x_4 .
- c) Ist es möglich, die Basisvariable x_2 durch x_5 zu ersetzen? Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige vollständige Basislösung und die allgemeine Lösung. (6 Punkte)

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Eigenwerte und **einen** Eigenvektor der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (5 Punkte)

Aufgabe 10

Bestimmen Sie rechnerisch mit Hilfe des Simplexalgorithmus das Maximum der Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ und

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 4.$$

(6 Punkte)