

Klausur in Wirtschaftsmathematik

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

Eine Anfangsschuld von $K_0 = 80.000 \text{ €}$ soll mit einer konstanten Annuität von $11.761,78 \text{ €}$ getilgt werden.

- a) Berechnen Sie den Zinssatz, wenn die Tilgungsrate am Ende des ersten Jahres $6961,78 \text{ €}$ beträgt.
- b) Bestimmen Sie die Laufzeit der Schuld, die Restschuld zu Beginn des letzten Jahres sowie die Zinsrate und die Tilgungsrate am Ende des letzten Jahres. (4 Punkte)

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = e^x$ das Taylorpolynom vom Grad $n = 7$ ($x_0 = 0$).

Bestimmen Sie seinen Wert an der Stelle $x = -1$. Schätzen Sie durch die Berechnung des Restgliedes ab, wie genau $f(-1) = e^{-1}$ durch diesen Wert approximiert wird.

(5 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + x_3^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3$$

- a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Konvexität/Konkavität.
- b) Berechnen Sie die lokale Extremstelle von f und begründen Sie, warum es sich dabei nur um ein lokales Extremum von f handelt. (6 Punkte)

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes das Minimum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 5 = 0.$$

Geben Sie eine kurze geometrische Interpretation dieses Optimierungsproblems. (5 Punkte)

Aufgabe 5

Berechnen Sie – falls möglich – das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{2 \cdot x}{(x^2 + 1)^3} dx$.

(5 Punkte)

Aufgabe 6

- a) Stellen Sie die Menge $M = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \right\}$

grafisch dar.

- b) Geben Sie ein lineares Ungleichungssystem an, dessen Lösungsmenge die unter Teilaufgabe a) angegebene Menge M ist. (5 Punkte)

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix und geben Sie an ob die zugehörige lineare Abbildung injektiv und/oder surjektiv ist. (4 Punkte)

Aufgabe 8

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 & -4 & -4 \\ -5 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 3 & -2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass jedes lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix A lösbar aber nicht eindeutig lösbar ist.
- Bestimmen Sie die vollständige Basislösung und die allgemeine Lösung dieses Systems mit den Basisvariablen x_2 , x_3 und x_4 .
- Ist es möglich, eine allgemeine Lösung Systems mit den Basisvariablen x_3 , x_4 und x_5 zu bestimmen?

(6 Punkte)

Aufgabe 9

- a) Bestimmen Sie rechnerisch mit Hilfe des Simplexalgorithmus für nichtnormale lineare Programme das Maximum der Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ unter den Nebenbedingungen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ und

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\leq 4 \end{aligned}$$

- b) Begründen Sie (ohne Rechnung), dass es eine weitere optimale Ecke gibt. (6 Punkte)

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Eigenwerte und **einen** Eigenvektor der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)