

Klausur in Wirtschaftsmathematik

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

Eine Anfangsschuld von $K_0 = 25.000$ € soll mit einer konstanten Annuität von 4.350,37€ getilgt werden.

- a) Berechnen Sie den Zinssatz, wenn die Tilgungsrate am Ende des ersten Jahres 2.350,37€ beträgt.
- b) Bestimmen Sie die Laufzeit der Schuld, die Restschuld zu Beginn des letzten Jahres sowie die Zinsrate und die Tilgungsrate am Ende des letzten Jahres. (5 Punkte)

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \sin x$ das Taylorpolynom vom Grad $n = 5$ ($x_0 = 0$).

Bestimmen Sie seinen Wert an der Stelle $x = -1$. Schätzen Sie durch die Berechnung des Restgliedes ab, wie genau $f(-1) = \sin(-1)$ durch diesen Wert approximiert wird. (5 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3 \cdot x_1^2 + x_2^2 + 4 \cdot x_3^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_3 - 10 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3$$

- a) Zeigen Sie, dass diese Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich konvex ist.
- b) Berechnen Sie die Extremstelle von f und begründen Sie, warum es sich dabei um das globale Minimum von f handelt. (5 Punkte)

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes das Minimum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung } g(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1 = 0.$$

Geben Sie eine kurze geometrische Interpretation dieses Optimierungsproblems. (5 Punkte)

Aufgabe 5

Berechnen Sie - falls möglich - das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{2 \cdot x}{(x^2 + 1)^3} dx$. (5 Punkte)

Aufgabe 6

- a) Stellen Sie die Menge $M = \left\{ l_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^3 l_i = 1, l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, l_3 \geq 0 \right\}$

grafisch dar.

- b) Geben Sie ein lineares Ungleichungssystem an, dessen Lösungsmenge die unter Teilaufgabe a) angegebene Menge M ist. (4 Punkte)

Rückseite beachten!

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie (ggf. mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe a) den Rang der Matrix und geben Sie an ob die zugehörige lineare Abbildung injektiv und/oder surjektiv ist. (4 Punkte)

Aufgabe 8

a) Zeigen Sie, dass jedes lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 & -3 & -5 \\ 2 & -6 & -9 & 2 & 6 \\ -1 & -3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

lösbar, aber nicht eindeutig lösbar ist.

b) Bestimmen Sie die vollständige Basislösung und die allgemeine Lösung mit den Basisvariablen x_3, x_4 und x_5 des linearen Gleichungssystems $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ (A ist die Koeffizientenmatrix aus der Teilaufgabe a) und $\underline{b} = (4, 2, -1)^T$).

c) Gibt es für dieses Gleichungssystem auch eine vollständige Basislösung und eine allgemeine Lösung mit den Basisvariablen x_1, x_2 und x_4 (Begründung!). (8 Punkte)

Aufgabe 9

Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch mit Hilfe des Simplexalgorithmus für nichtnormale lineare Programme das Maximum der Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ unter den Nebenbedingungen $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ und

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

(9 Punkte)