

Klausur in Wirtschaftsmathematik

- 1) Eine Anfangsschuld von $K_0 = 10.000$ DM soll mit einer konstanten Annuität von $A = 1874,44$ DM bei einem Zinsfuß von $p = 10\%$ getilgt werden. Stellen Sie den Tilgungsplan für die ersten drei Jahre auf und berechnen Sie die Laufzeit. (4 Punkte)
- 2) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = e^x$ das Taylorpolynom vom Grad $n = 5$ ($x_0 = 0$). Berechnen Sie den Wert des Taylorpolynoms an der Stelle $x = -1$ und schätzen Sie durch die Berechnung des Restgliedes ab, wie genau $f(-1) = 1/e$ durch diesen Wert approximiert wird. (5 Punkte)
- 3) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit
- $$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3$$
- a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Konvexität/Konkavität.
 b) Berechnen Sie die Extremstelle von f und begründen Sie, warum es sich dabei um das globale Minimum von f handelt. (6 Punkte)
- 4) Berechnen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes das Minimum der Funktion $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 4 = 0$. Geben Sie eine kurze geometrische Interpretation dieser Optimierungsaufgabe. (5 Punkte)
- 5) Berechnen Sie – falls möglich - das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} x \cdot \exp(-x^2) dx$. Hinweis: $\exp(\dots)$ bezeichnet die e -Funktion. (5 Punkte)
- 6) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- a) Geben Sie Definitions- und Wertebereich der zugehörigen linearen Abbildung $\tilde{A}$ an.
 b) Berechnen Sie den Rang dieser Matrix.
 c) Ist die zur Matrix A gehörige lineare Abbildung injektiv oder surjektiv? (5 Punkte)
- 7) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem
- $$\begin{array}{rclcl} -b \cdot x_1 & & + & a \cdot x_3 & = & a - b \\ a \cdot x_1 & & + & b \cdot x_3 & = & a + b \\ -b \cdot x_1 & + & a \cdot x_2 & + & a \cdot x_3 & = & -b \end{array}$$
- a) Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist dieses System eindeutig lösbar?
 b) Im Fall der eindeutigen Lösbarkeit bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der CRAMERSchen Regel.
 c) Überprüfen Sie die Lösbarkeit dieses Systems für den Fall $a = 0, b \neq 0$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die allgemeine Lösung. (8 Punkte)

Rückseite beachten!

- 8) Berechnen Sie Eigenwerte und –vektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und schließen Sie aus dem Ergebnis auf die Definitheitseigenschaften von A. (7 Punkte)

- 9) Bestimmen Sie grafisch das Maximum der Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + 2 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ und

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

(5 Punkte)