

Klausur im Fach  
**Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften**  
 Statische Optimierung und Entscheidungstheorie

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes (unter Benutzung der CRAMERSchen Regel) das Minimum der Funktion  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  unter der Nebenbedingung  $c \cdot x_1 + x_2 = 1$  (Dabei ist  $c$  eine unbestimmte reelle Konstante).
- b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Envelopen-Theorems, wie dieses Minimum auf Änderungen der Konstanten  $c$  reagiert.
- c) Zeigen Sie, dass  $\frac{df_{\min}(c)}{dc}$  für  $c > 0$  negativ und für  $c < 0$  positiv ist. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Ein Unternehmen entscheidet in Risikosituationen gemäß des Bernoulliprinzip mit der Risikonutzenfunktion  $U(x) = \frac{3 \cdot x^2}{x^2 + 2}$  ( $x$  nehme nur nichtnegative Werte an).

- a) Zeigen Sie, dass die Risikonutzenfunktion stetig und streng monoton steigend ist.
- b) Für welche Werte von  $x$  verhält sich das Unternehmen risikofreudig und für welche risikoscheu?
- c) Betrachten Sie nun die in der folgenden Tabelle dargestellte Entscheidungssituation. Bewerten Sie die aufgeführten Aktionen mit der gegebenen Risikonutzenfunktion und bestimmen Sie die resultierende Reihenfolge der Aktionen.
- d) Bestimmen Sie das Sicherheitsäquivalent der Aktion  $a_3$  und vergleichen Sie es mit dem Erwartungswert  $E(X|a_3)$  und entscheiden Sie, ob diese Aktion risikofreudig oder risikoscheu bewertet wird. Begründen Sie, warum dieser Vergleich das Ergebnis von Teilaufgabe b) nicht bestätigen kann.

| Wahrscheinlichkeiten | 0,4 | 0,4 | 0,2 |
|----------------------|-----|-----|-----|
| Zustände             | Z1  | Z2  | Z3  |
| Aktionen             |     |     |     |
| a1                   | 0,5 | 0,9 | 1,7 |
| a2                   | 1,2 | 1,5 | 2,0 |
| a3                   | 0,6 | 1,0 | 1,4 |
| a4                   | 1,0 | 1,2 | 1,6 |

(9 Punkte)

**Rückseite beachten!**

### Aufgabe 3

Das Management eines gemeinnützigen Fonds plant mit einem Horizont von  $t = 1, 2, 3 = T$  Perioden die Verwendung des Fondsvermögens ( $Z_{t-1}$ ). Dazu muss es die Höhe der Entnahmen für karitative Zwecke ( $a_t$ ) festlegen. Die Entwicklung des Fondsvermögens ergibt sich gemäß der Formel  $Z_t = 2 \cdot (Z_{t-1} - a_t)$ . Wie sind die Entnahmen  $a_t$  ( $t = 1, 2, 3$ ) festzulegen, wenn der Gesamtnutzen  $u_1 + u_2 + u_3$  mit  $u_t = U(a_t) = \sqrt{a_t}$  maximiert werden soll. Bestimmen Sie durch Rückwärts- und Vorwärtsrechnung die optimale Strategie, wenn  $Z_0 = 7.000.000$  € gegeben ist.

Hinweis: Unterstellen Sie Konkavität aller zu maximierenden Funktionen, so dass sich die Berechnung zweiter Ableitungen erübrigt.

(8 Punkte)