

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
Dynamische Optimierung und Stabilität

1) Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 4 \cdot y_{t+1} + 5 \cdot y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung.

b) Gibt es eine Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung, die (für $t \rightarrow \infty$) gegen 0 konvergiert?

(18 Punkte)

2) Gegeben sei das autonome lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = 2 \cdot y_1 + y_2 - 3$$

$$\dot{y}_2 = 4 \cdot y_1 - y_2 - 3.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und Untersuchen Sie sie auf Konvergenz.

b) Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durchführen.

(18 Punkte)

3) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^2 y + y \cdot \dot{y} + \dot{y} + \frac{1}{2} \cdot \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(2) = 5$.

(14 Punkte)