

Klausur im Fach
Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
(Dynamische Optimierung und Stabilität)

1) Gegeben sei die lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 2 \cdot y_{t+1} + 0,75 \cdot y_t = -1.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.

b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = 6$ und $\tilde{z}_1^* = 5$ und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert von $\tilde{z}_t^*$ an. (16 Punkte)

2) Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = y_1^2 + y_2 - 2$$

$$\dot{y}_2 = y_1^3 - y_2.$$

a) Führen Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durch.

b) Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie die Jacobi-Matrix an der Gleichgewichtsstelle (1, 1) untersuchen (lokale Stabilität, Art der Konvergenz). (18 Punkte)

3) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^1 y^2 + 2y\dot{y} + \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(1) = e + 1/e$ ($e = 2,718\dots$).

(16 Punkte)