

Klausur in Wirtschaftsmathematik
Dynamische Optimierung und Stabilität

1) Gegeben sei die lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} + \frac{1}{3} \cdot y_{t+1} - \frac{2}{9} \cdot y_t = 10.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz. (16 Punkte)

2) Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = e^{-y_1} - y_2$$

$$\dot{y}_2 = e^{y_1} - y_2$$

a) Führen Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durch.

b) Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie die Jacobi-Matrix an der Gleichgewichtsstelle (0, 1) untersuchen (lokale Stabilität, Art der Konvergenz). (18 Punkte)

3) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktionals

$$V(y) = \int_0^1 \dot{y}^2 - y\dot{y} - 2t\dot{y} \, dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(1) = e$ ($= 2,718\dots$).

(16 Punkte)