

Dynamik, Stabilität und Optimierung

Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Erasmusstud.: 90 Minuten)

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} + \frac{1}{3} \cdot y_{t+1} - \frac{2}{9} \cdot y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = \frac{43}{7}$ und $\hat{z}_1 = \frac{61}{21}$. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -4 \cdot y_1 + y_2 + 3$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - 4 \cdot y_2 + 3$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durchführen. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^2 2 \cdot y \cdot e^t + y^2 + \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(2) = 2 \cdot e^2 + e^{-2}$

Hinweise: Die Funktion $\tilde{z}^*(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^t$ ist eine partikuläre Lösung der in dieser Aufgabe auftretenden inhomogenen linearen Differenzialgleichung, e ($\approx 2,718...$) ist die EULERSche Zahl.

(7 Punkte)