

Dynamik, Stabilität, Optimierung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Erasmusstud.: 90 Minuten)

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - 0,6 \cdot y_{t+1} + 0,25 \cdot y_t = 0,5^t$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = 5$ und $\hat{z}_1 = 3,3$. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -y_1^2 - y_2 + 1$$

$$\dot{y}_2 = y_1^2 - y_2 - 1$$

- a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösungen dieses Systems.
- b) Führen Sie eine Phasendiagrammanalyse für die Gleichgewichtsstelle $(-1, 0)$ durch, und überprüfen Sie das Ergebnis anhand der zugehörigen Jacobimatrix.
- c) Berechnen Sie auch für die zweite Gleichgewichtsstelle die Jacobimatrix und charakterisieren Sie, indem Sie die Eigenwerte dieser Matrix berechnen, von welcher Art dieses Gleichgewicht ist (lokale Stabilität, Art des Anpassungsprozesses).

(10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^2 \dot{y}^2 - y\dot{y} - 2ty dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(2) = 4$

(7 Punkte)