

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - y_{t+1} - \frac{3}{4} \cdot y_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und geben Sie an, unter welcher Voraussetzung sie konvergiert.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung, die zum einen konvergiert und zum anderen die Startbedingung $\tilde{z}_0^* = 1$ erfüllt. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = y_1 + 2 \cdot y_2 - 2$$

$$\dot{y}_2 = 2 \cdot y_1 + y_2 - 4$$

- a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagrammanalyse. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^1 y^2 + 2 \cdot y \cdot \dot{y} + \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(1) = e + \frac{1}{e}$.

(7 Punkte)