

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 2 \cdot y_{t+1} + \frac{3}{4} \cdot y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = 2$ und $\tilde{z}_1^* = 1$. (16 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -y_1^2 + y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - y_2 + 2$$

- a) Berechnen Sie die beiden Gleichgewichtslösungen dieses Systems.
- b) Führen Sie eine Phasendiagrammanalyse für die Gleichgewichtsstelle (2, 4) durch, und überprüfen Sie das Ergebnis anhand der zugehörigen Jacobimatrix.
- c) Charakterisieren Sie auch das lokale Konvergenzverhalten an der zweiten Gleichgewichtsstelle, indem Sie Spur und Determinante der Jacobimatrix an dieser Stelle untersuchen. (20 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^2 \dot{y}^2 - y\dot{y} - 2ty \, dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(2) = 5$.

(14 Punkte)