

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{3}{16} \cdot y_t = \left(\frac{1}{4}\right)^t.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = 2$ und $\tilde{z}_1^* = -1$. (16 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -y_1 + 2 \cdot y_2 - 1$$

$$\dot{y}_2 = -2 \cdot y_2 + 2$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagramm-Analyse. (20 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^1 y + y \cdot \dot{y} + \dot{y} + \frac{1}{2} \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(1) = 5$

(14 Punkte)