

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} + 0,6 \cdot y_{t+1} - 0,16 \cdot y_t = 0,2^t$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = 1$ und $\hat{z}_1 = 1,2$. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -y_1^2 + y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - y_2^2$$

- a) Berechnen Sie die beiden Gleichgewichtslösungen dieses Systems.
- b) Führen Sie eine Phasendiagrammanalyse für die Gleichgewichtsstelle (1, 1) durch, und überprüfen Sie das Ergebnis anhand der zugehörigen Jacobimatrix.
- c) Charakterisieren Sie auch das lokale Konvergenzverhalten an der zweiten Gleichgewichtsstelle, indem Sie Spur und Determinante der Jacobimatrix an dieser Stelle untersuchen. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^1 \dot{y}^2 - 2 \cdot y \cdot \dot{y} - t \cdot \dot{y} dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(1) = 3$

(7 Punkte)