

**Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften**  
**Dynamische Optimierung und Stabilität**

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

**Aufgabe 1**

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung  $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{4} \cdot y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ .

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- b) Berechnen Sie die Lösung  $\hat{z}_t$  dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten  $\hat{z}_0 = 1$  und  $\hat{z}_1 = 2$ . (8 Punkte)

**Aufgabe 2**

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = 2 \cdot y_1 + y_2 - 4$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + 2 \cdot y_2 - 2$$

- a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagrammanalyse. (10 Punkte)

**Aufgabe 3**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^{\pi/4} -y^2 + \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen  $y(0) = 1$  und  $y(\pi/4) = 0$ .

Hinweis:  $\sin \pi/4 = \cos \pi/4$

(7 Punkte)