

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
Dynamische Optimierung und Stabilität

1) Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 2 \cdot y_{t+1} + \frac{3}{4} \cdot y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung.

b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = 1$ und

$\tilde{z}_1^* = -\frac{1}{2}$ und zeigen Sie, daß sie (für $t \rightarrow \infty$) konvergiert. (18 Punkte)

2) Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -\ln(y_1) + y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_1^2 + y_2 - 1.$$

a) Führen Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durch.

b) Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie die Jacobi-Matrix an der Gleichgewichtsstelle (1, 0) untersuchen (lokale Stabilität, Art der Konvergenz). (18 Punkte)

3) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^1 t^2 + \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 0$ und $y(1) = 3$.

(14 Punkte)