

Klausur im Fach
Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
(Dynamische Optimierung und Stabilität)

Hinweis zu den Notationen: Die Ableitungen der Funktionen y , y_1 , y_2 nach der (Zeit-) Variablen t werden mit y' , y_1' , y_2' bezeichnet.

1) Gegeben sei die lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{2}{9} \cdot y_t = \left(\frac{1}{3}\right)^t.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Bestimmen Sie eine partikuläre und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung. (17 Punkte)

2) Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1^3 - y_2$$

$$y_2' = -y_1^2 - y_2 + 2.$$

- a) Führen Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durch.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie die Jacobi-Matrix an der Gleichgewichtsstelle $(1, 1)$ untersuchen (lokale Stabilität, Art der Konvergenz). (18 Punkte)

3) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^2 2 \cdot y \cdot e^t + y^2 + y'^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(2) = 2 \cdot e^2 + e^{-2}$

Hinweis: Die Funktion $\tilde{z}^*(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^t$ ist eine partikuläre Lösung der in dieser Aufgabe auftretenden Differentialgleichung.

(15 Punkte)