

Dynamik, Stabilität und Optimierung

Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Erasmusstud.: 90 Minuten)

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - 2 \cdot y_{t+1} + 0,75 \cdot y_t = 0,5^t$.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = 1$ und $\hat{z}_1 = -0,5$. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -2y_1 + y_2 + 3$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - 2 \cdot y_2$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durchführen. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^3 t^2 + \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(3) = 7$.

(7 Punkte)