

Dynamik, Stabilität, Optimierung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Erasmusstud.: 90 Minuten)

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - y_{t+1} + 0,25 \cdot y_t = 0,5$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = 3$ und $\hat{z}_1 = 3$. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = 2 \cdot y_1 - y_2 - 4$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 + 2 \cdot y_2 + 2.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und Untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen zur Teilaufgabe a), indem Sie für dieses System eine Phasendiagramm-Analyse (einschließlich Interpretation) durchführen. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^{\pi/2} y^2 - \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(\pi/2) = 0$.

Hinweis: $\sin \pi/2 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$.

(7 Punkte)