

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften**Dynamische Optimierung und Stabilität****Bearbeitungszeit: 60 Minuten**

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - 2 \cdot y_{t+1} + \frac{3}{4} \cdot y_t = 1$.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = 0$ und $\hat{z}_1 = -2$. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = y_1 - y_2 - 2$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 + y_2^2$$

- Berechnen Sie die beiden Gleichgewichtslösungen dieses Systems.
- Führen Sie eine Phasendiagrammanalyse für die Gleichgewichtsstelle (1, -1) durch, und überprüfen Sie das Ergebnis anhand der zugehörigen Jacobimatrix.
- Charakterisieren Sie auch das lokale Konvergenzverhalten an der zweiten Gleichgewichtsstelle, indem Sie Spur und Determinante der Jacobimatrix an dieser Stelle untersuchen. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^4 \dot{y}^2 - y\dot{y} - 2t\dot{y} dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(4) = 13$

(7 Punkte)