

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerischer Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{3}{8} \cdot y_t = \left(\frac{3}{2}\right)^t$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und zeigen Sie, dass zwar die Lösung der homogenen Gleichung konvergiert, die Lösung der inhomogenen dagegen stets divergiert.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = \frac{8}{9}$ und $\tilde{z}_1^* = \frac{4}{3}$. (15 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -2 \cdot y_1 + y_2 + 2$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - 2 \cdot y_2 + 2$$

- a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagrammanalyse. (20 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^{\pi/4} y^2 - \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(\pi/4) = 0$.

Hinweis: $\sin \pi/4 = \cos \pi/4$

(15 Punkte)