

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{2}{9} \cdot y_t = \left(\frac{1}{3}\right)^t.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = 2$ und $\tilde{z}_1^* = -2$.

(16 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -3 \cdot y_1 - y_2 + 4$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - 3 \cdot y_2 + 4$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und zeigen Sie, dass sie konvergiert.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagramm-Analyse.

(20 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^1 y^2 + 4 \cdot y \cdot \dot{y} + 4 \cdot \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2 \cdot e^{1/2}$ und $y(1) = 1 + e$.

(14 Punkte)