

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{3}{16} \cdot y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = -8$ und $\tilde{z}_1^* = -5$. (16 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -\frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 1$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 1$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und zeigen Sie, dass sie konvergiert.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagramm-Analyse. (20 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^{\pi/2} y^2 - \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(\pi/2) = 1$

(14Punkte)