

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- nicht programmierbarer Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur.

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 2 \cdot y_{t+1} + \frac{3}{4} \cdot y_t = -\frac{1}{4}.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung, die konvergiert, wenn t gegen Unendlich strebt und den Startwert $\tilde{z}_0^* = 2$ besitzt. (16 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -2 \cdot y_1 + y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_1 - 2 \cdot y_2 + 6$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagramm-Analyse. (20 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktionals

$$V(y) = \int_0^1 \dot{y}^2 - y\dot{y} - 2t\dot{y} dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(1) = 5/2$

(14 Punkte)