

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften
Dynamische Optimierung und Stabilität

1) Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung

$$y_{t+2} - 0,2 \cdot y_{t+1} - 0,24 \cdot y_t = 0,5^t.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\tilde{z}_t^*$ dieser Differenzengleichung mit den Startwerten $\tilde{z}_0^* = -100/9$ und $\tilde{z}_1^* = -50/9$. (16 Punkte)

2) Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -y_1^2 - y_2 + 1$$

$$\dot{y}_2 = y_1^2 - y_2 - 1.$$

- a) Bestimmen Sie die beiden Gleichgewichtslösungen dieses Systems.
- b) Führen Sie eine Phasendiagramm-Analyse für die Umgebung der Gleichgewichtsstelle $(-1, 0)$ (einschließlich Interpretation) durch.
- c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix an der zweiten Gleichgewichtsstelle $(1, 0)$ und schließen Sie daraus auf die Eigenschaften dieser Gleichgewichtsstelle (lokale Stabilität, Art der Konvergenz). (18 Punkte)

3) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^2 y^2 + 4 \cdot y \cdot \dot{y} + 4 \cdot \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(2) = e + 1/e$.

(16 Punkte)