

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - \frac{2}{3}y_{t+1} + \frac{1}{12}y_t = 5$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = 4$ und $\hat{z}_1 = 10$. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das autonome Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = y_1^2 - y_2$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 + y_2 - 2$$

- a) Berechnen Sie die beiden Gleichgewichtslösungen dieses Systems.
- b) Führen Sie eine Phasendiagrammanalyse für die Gleichgewichtsstelle $(-1, 1)$ durch, und überprüfen Sie das Ergebnis anhand der zugehörigen Jacobimatrix.
- c) Charakterisieren Sie auch das lokale Konvergenzverhalten an der zweiten Gleichgewichtsstelle, indem Sie Spur und Determinante der Jacobimatrix an dieser Stelle untersuchen. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^2 2 \cdot y \cdot e^t + y^2 + \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 2$ und $y(2) = 2 \cdot e^2 + e^{-2}$

Hinweis: Die Funktion $\tilde{z}^*(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^t$ ist eine partikuläre Lösung der in dieser Aufgabe auftretenden Differenzialgleichung. (7 Punkte)