

Formale Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Dynamische Optimierung und Stabilität

Zugelassene Hilfsmittel sind

- beliebige handschriftliche oder gedruckte Unterlagen,
- Taschenrechner ohne vollständige alphanumerische Tastatur und Grafikdisplay

Aufgabe 1

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzengleichung $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2} \cdot y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.
- b) Berechnen Sie die Lösung $\hat{z}_t$ dieser Differenzengleichung, mit den Startwerten $\hat{z}_0 = 5$ und $\hat{z}_2 = 2$.

Hinweise: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Der zweite Startwert ist für $t = 2$ und nicht, wie üblich, für $t = 1$ gegeben. (8 Punkte)

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Differenzialgleichungssystem

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{2} \cdot y_1 + y_2 - 1$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + y_2 - 4$$

- a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems und untersuchen Sie sie auf Konvergenz.
- b) Überprüfen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe a) durch eine Phasendiagrammanalyse. (10 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung das Extremal des Funktional

$$V(y) = \int_0^1 y + y \cdot \dot{y} + \dot{y} + \frac{1}{2} \cdot \dot{y}^2 dt$$

bei den Nebenbedingungen $y(0) = 1$ und $y(1) = \frac{3}{2}$.

(7 Punkte)