Geometrische Vorerfahrungen von Schulanfängern

Geometrische Vorerfahrungen von Schulanfängern

- Problemlage
- Anlage der Untersuchung
- Ausgewählte Ergebnisse
- Konsequenzen

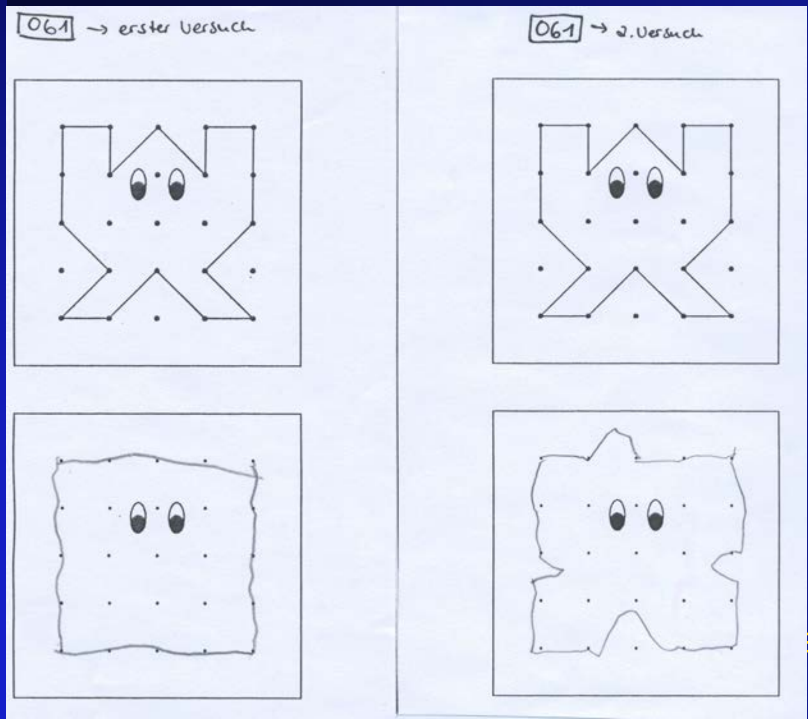
Geometrische Vorerfahrungen von Schulanfängern

- Problemlage
- Anlage der Untersuchung
- Ausgewählte Ergebnisse
- Konsequenzen

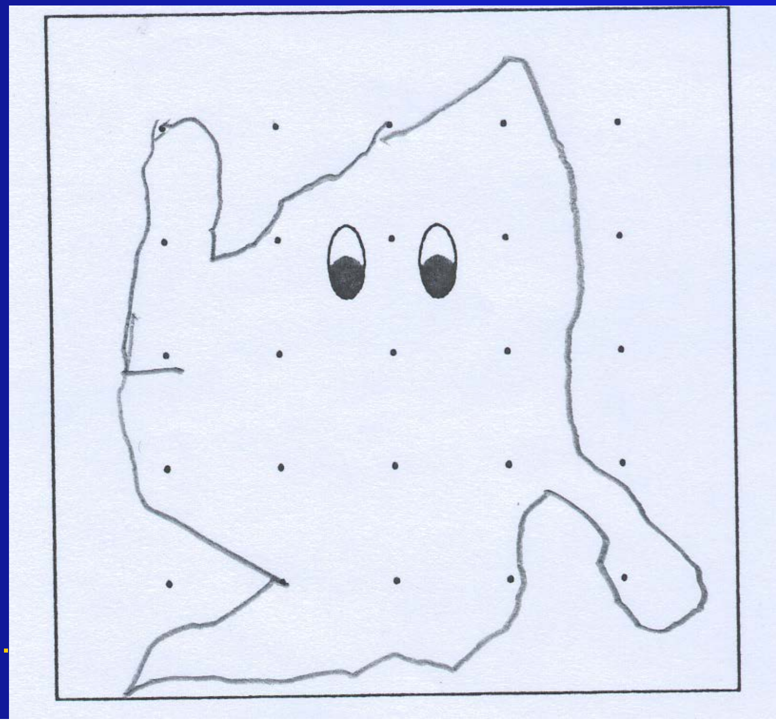
Drastische Niveauunterschiede in den Lernvoraussetzungen:

Geometriestudie (2003)

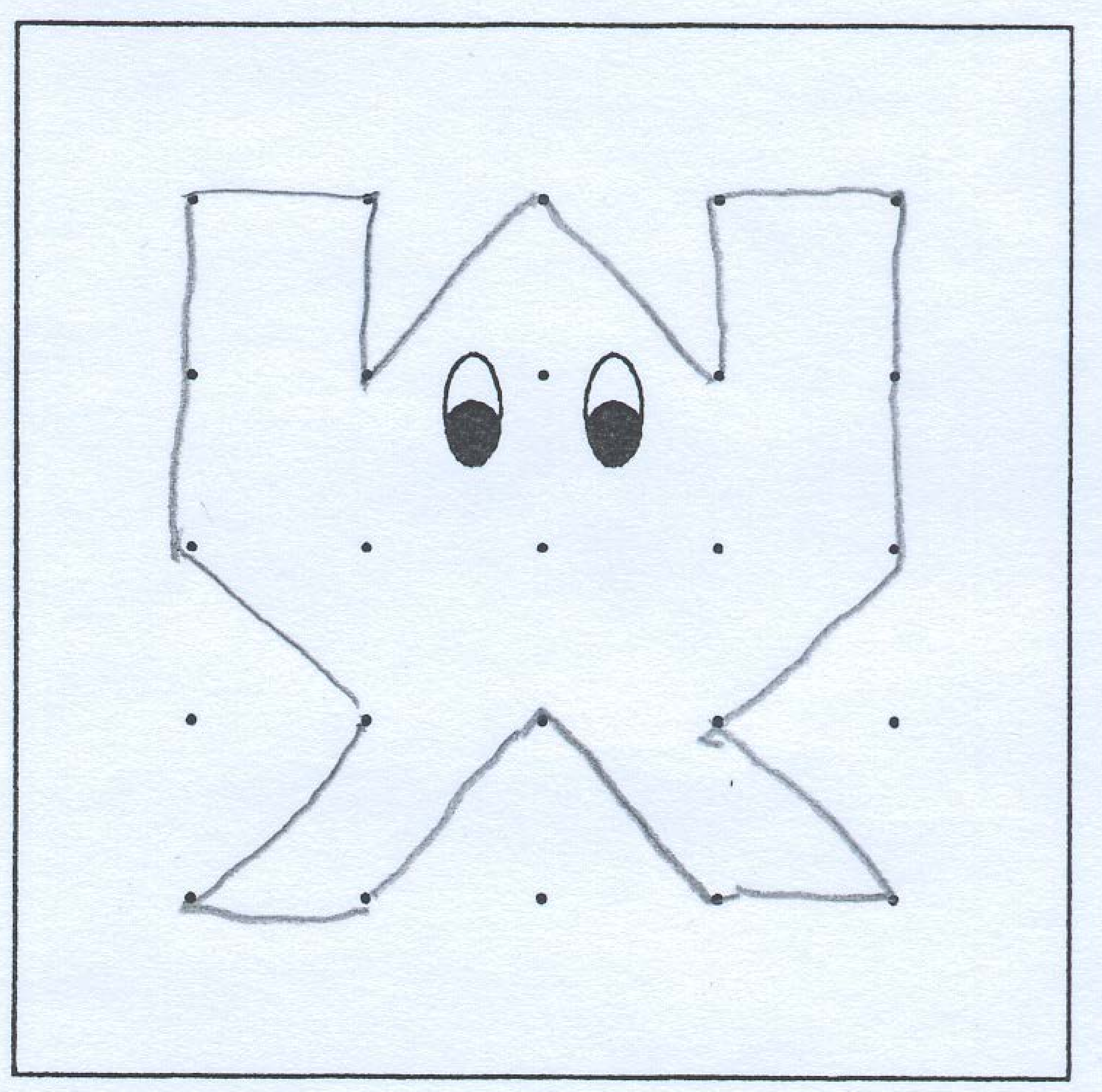
Jedes 5. Kind (!) zeichnet diese Figur so ab, dass keinerlei Ähnlichkeit zur Ursprungsfigur besteht.



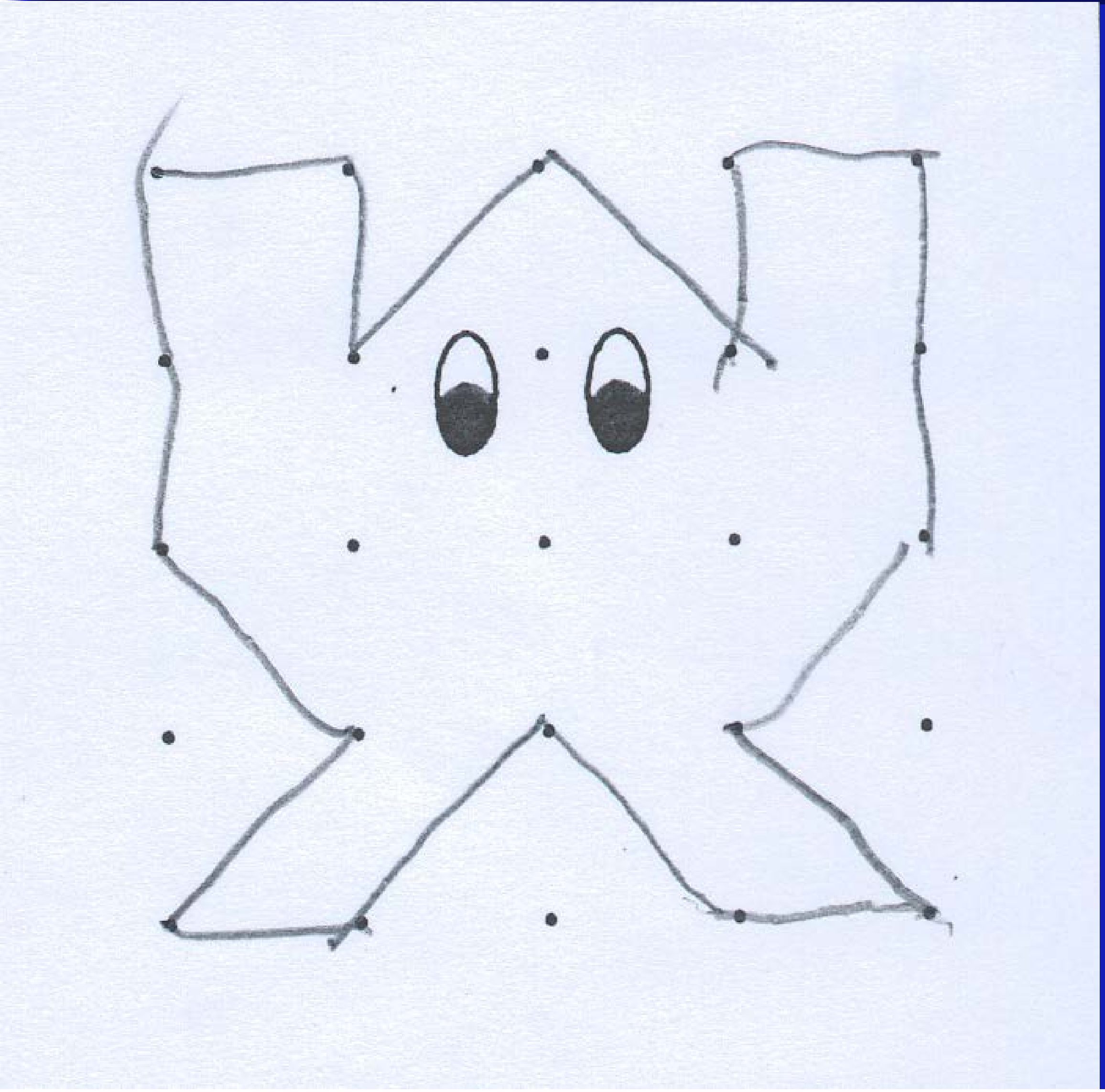
atikus.



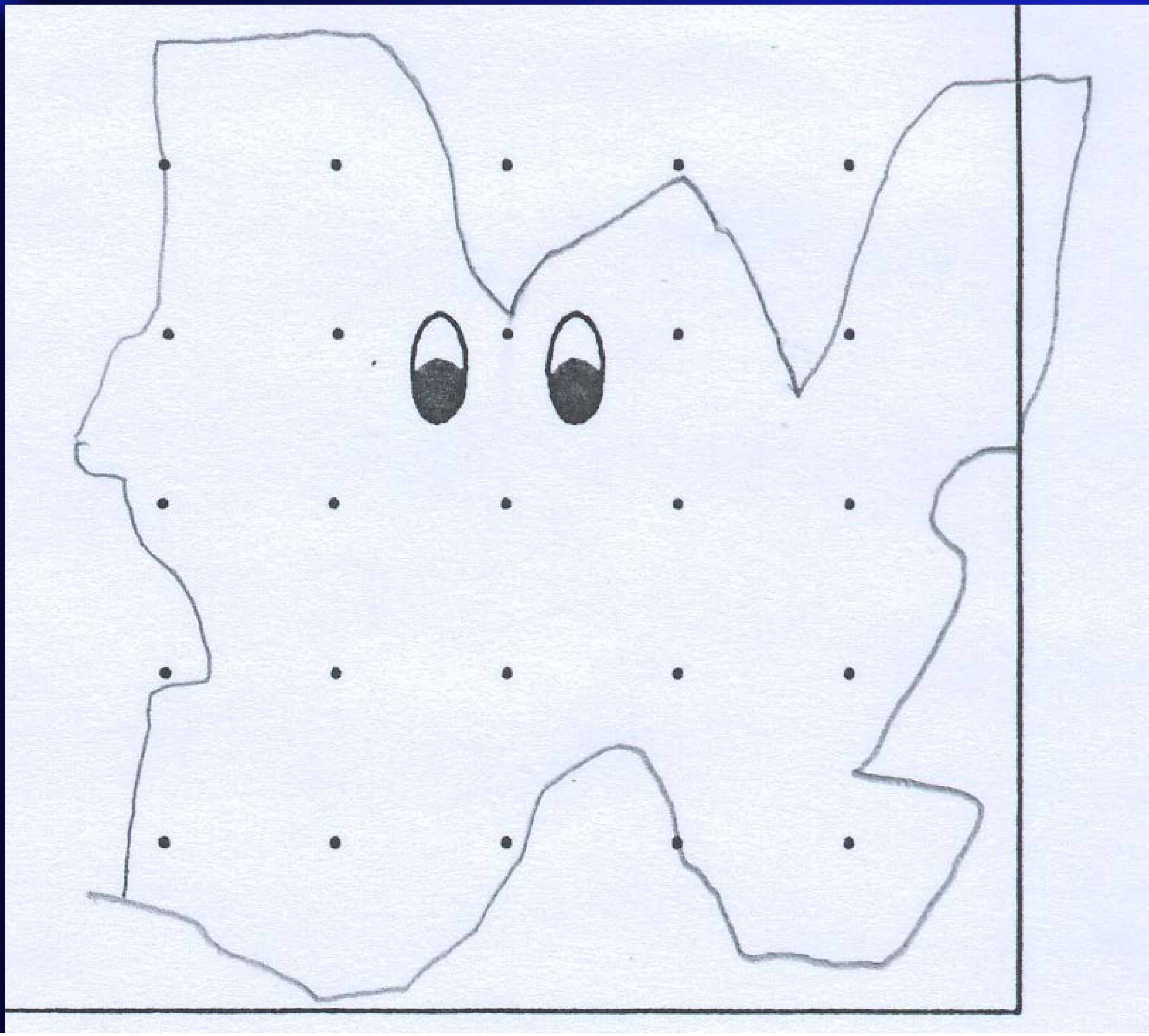
Kinder zeichnen die Figur ab wie hier zu sehen ...



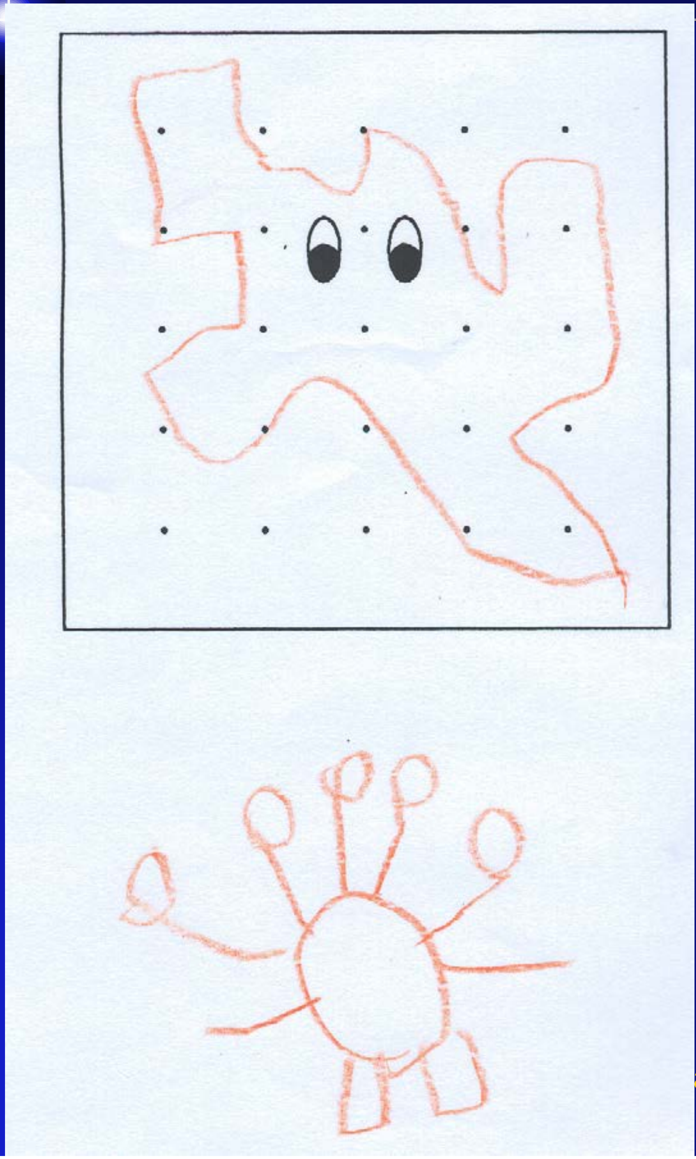
... oder wie hier zu sehen, ...



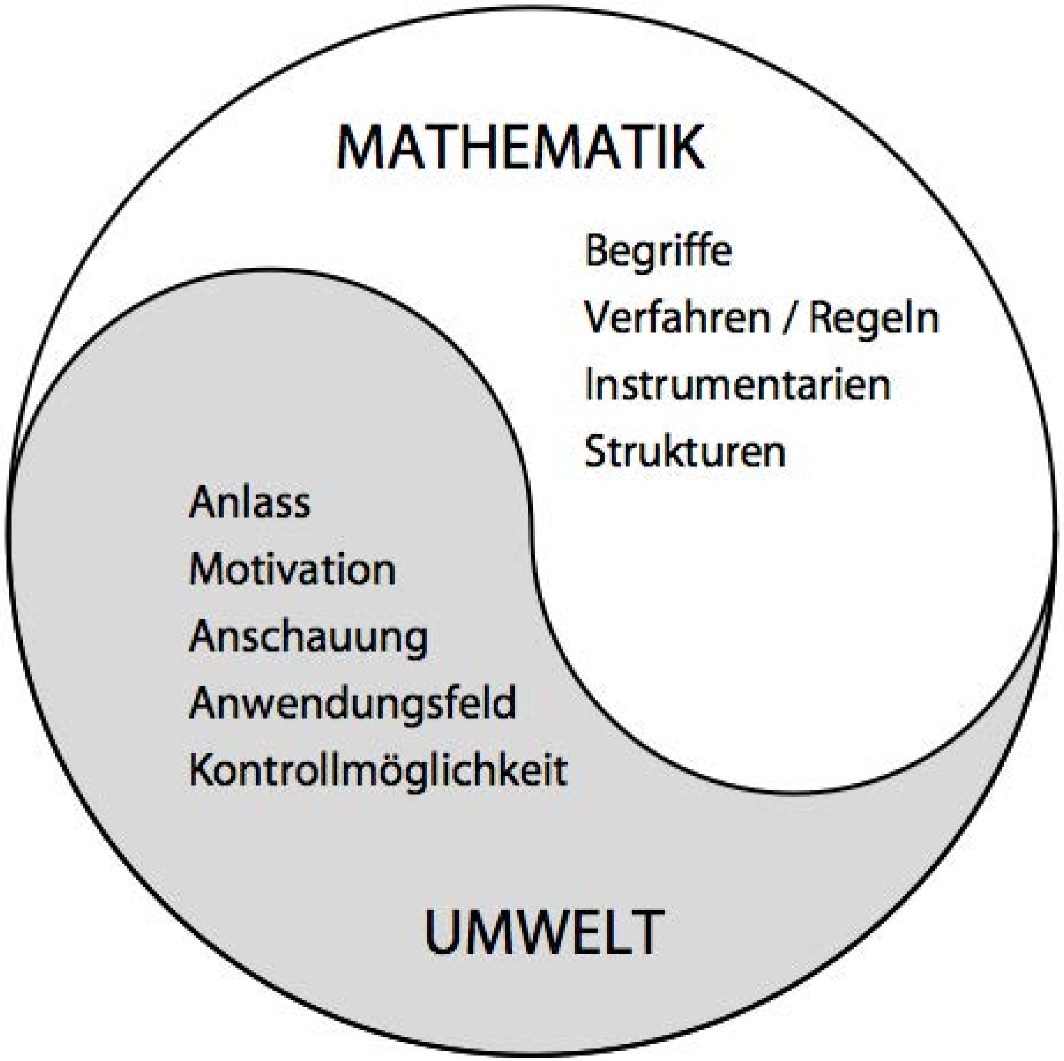
... und mit Ihnen in der gleichen Klasse sitzen Kinder, die die Figur so abzeichnen, wie es hier zu sehen ist ...



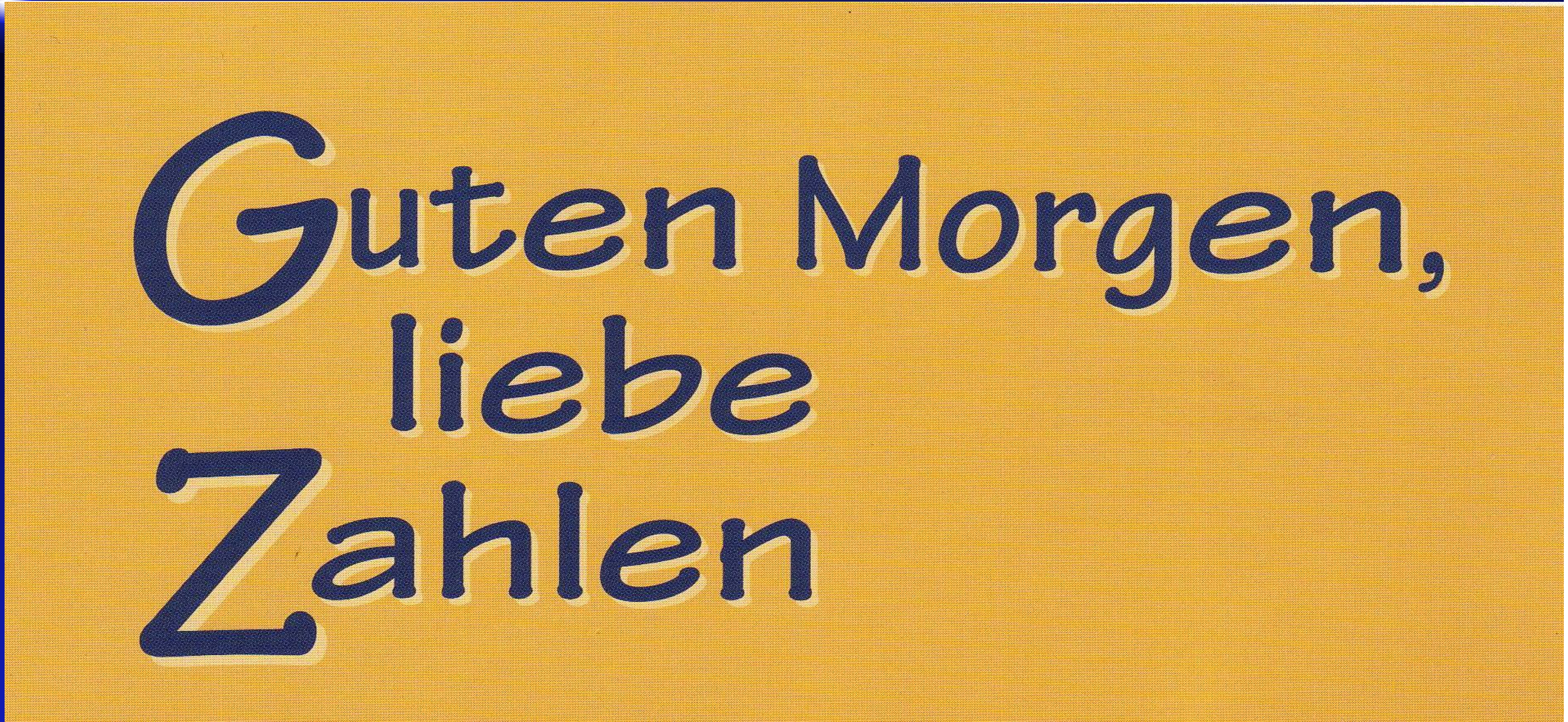
... oder wie es hier zu sehen ist.



Die Welt, die Mathematik und das Kind



Mathematik?



Gute Nacht, Deutschland ... -
wenn so etwas unser Niveau bestimmt ...

Mathematik?

»Seid freundlich zu
den Zahlen, dann sind
die Zahlen auch
freundlich zu Euch.«

so werden Zahlen mystifiziert

Mathematik?

Vielleicht haben auch Sie Angst, dass Sie gestern der 3 nicht freundlich genug begegnet sind ;-)

Nehmen die anderen Zahlen dann Rache?

Mathematik?

nicht zu rechtfertigen

Mathematik?

Die Verbreitung derartiger Materialien gehorcht den Prinzipien des mittelalterlichen Ablasshandels.

Eltern haben gehört, dass Mathe wichtig ist, und fragen, ob in der KITA auch Mathe gemacht wird.

Das Personal möchte etwas vorweisen, hat aber keine rechte Ahnung von der Sache, kauft Zahlenland und die ebenso sachunkundigen Eltern sind beruhigt.

Problemlage

- Konsens: Im Anfangsunterricht an die Vorerfahrungen der Kinder anknüpfen
- Untersuchungen zu Vorerfahrungen von Schulanfängern auf arithmetischem Gebiet liegen vor
- Die Bedeutung der Geometrie gerade im Anfangsunterricht ist unumstritten
- Aber: Gerade in der Geometrie fehlt eine umfassende Analyse der Vorerfahrungen

Problemlage

- Konsens: Im Anfangsunterricht an die Vorerfahrungen der Kinder anknüpfen
- Untersuchungen zu Vorerfahrungen von Schulanfängern auf arithmetischem Gebiet liegen vor
- Die Bedeutung der Geometrie gerade im Anfangsunterricht ist unumstritten
- Aber: Gerade in der Geometrie fehlt eine umfassende Analyse der Vorerfahrungen

Bedeutung der Geometrie: Zahlvorstellungen

- Zahlen sind kodiert:

  arabisch - (als Ziffer 4876)

  verbal - (viertausendachthundertsechsundsiebzig)

  analog- relational - (die Zahl in Beziehung zu anderen Zahlen)

- Die Vorstellung von Zahlen und Zahlbeziehungen: Wie stellen Sie sich 4, 8, 48, 4876 ... vor?

Geometrische Vorerfahrungen von Schulanfängern

- Problemlage
- Anlage der Untersuchung
- Ausgewählte Ergebnisse
- Konsequenzen

Zur Anlage der Untersuchung

- Einzelinterviews mit ca. 1200 Kindern der Großräume Halle, Rostock und Hamburg in den letzten 6 Wochen vor der Einschulung
- Videodokumentation der Interviews
- Qualitative Klassifikation, Transkription
- Ableitung qualitative Aussagen vor dem Hintergrund quantitativer Aussagen

Zur Anlage der Untersuchung

- keine vordergründige Erfassung von Faktenwissen der Kinder
- 12 Aufgaben mit Orientierung an fundamentalen Ideen Faches (Rotation der Aufgaben)
- Analyse, inwieweit die Kinder entsprechende Konzepte aufgebaut haben - LÖSUNGSWEG

Fundamentale Ideen

- Die Idee der räumlichen Strukturierung
- Die Idee der Teil – Ganzes – Beziehung
- Die Idee der Zahl
- Die Idee der Form
- Die Idee des Messens
- Die Idee der Gesetzmäßigkeiten und Muster
- Die Idee der funktionalen Abhängigkeit
- Die Idee der Symmetrie

Geometrie

Arithmetik

Größen

Fundamentale Ideen

- Die Idee der räumlichen Strukturierung
- Die Idee der Teil – Ganzes – Beziehung
- Die Idee der Zahl
- Die Idee der Form
- Die Idee des Messens
- Die Idee der Gesetzmäßigkeiten und Muster
- Die Idee der funktionalen Abhängigkeit
- Die Idee der Symmetrie

bezogen auf fundamentale Ideen

- vorhandene Konzepte der Kinder erfassen,
- Konzepte klassifizieren,
- bilanzieren und mögliche Richtungen und Wege der Entwicklung aufzeigen
- Hinweise für die Arbeit in Schule und Vorschule ableiten (z. B. zum Design von Lernumgebungen)

Geometrische Vorerfahrungen von Schulanfängern

- Problemlage
- Anlage der Untersuchung
- Ausgewählte Ergebnisse
- Konsequenzen

Die Idee der räumlichen Strukturierung

- Umwelt ist 3-dimensional
- Auseinandersetzung mit der Umwelt ist auch Auseinandersetzung mit deren Räumlichkeit
- das fordert und fördert die Fähigkeiten zum Wahrnehmen, Vorstellen und Darstellen von

  - Objekten,

  - Lagebeziehungen zwischen Objekten und

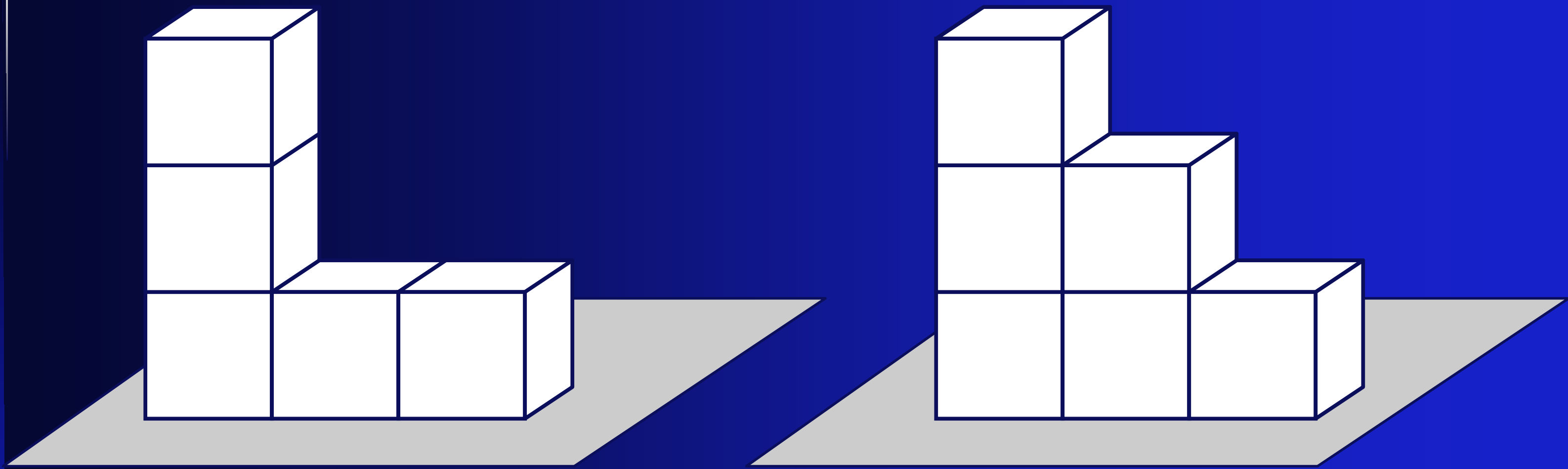
  - räumlichen Prozessen.

Eingesetzte Aufgaben

- Ansichten in der Stadt
- Wege durch die Stadt
- Bauen mit Würfeln

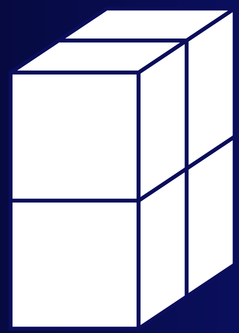

ABC
1 2 3

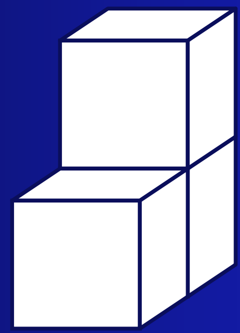
Würfelbauten (I)

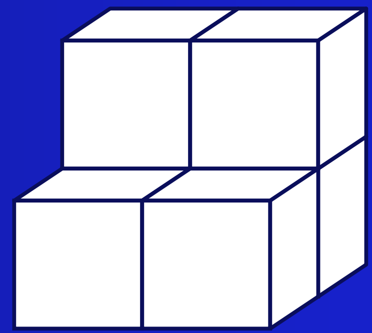


- legen oder aufrecht bauen?
- umbauen oder neu bauen?

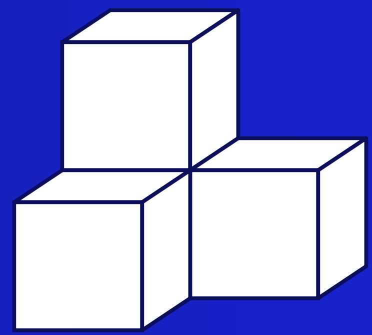
Würfelbauten (II)



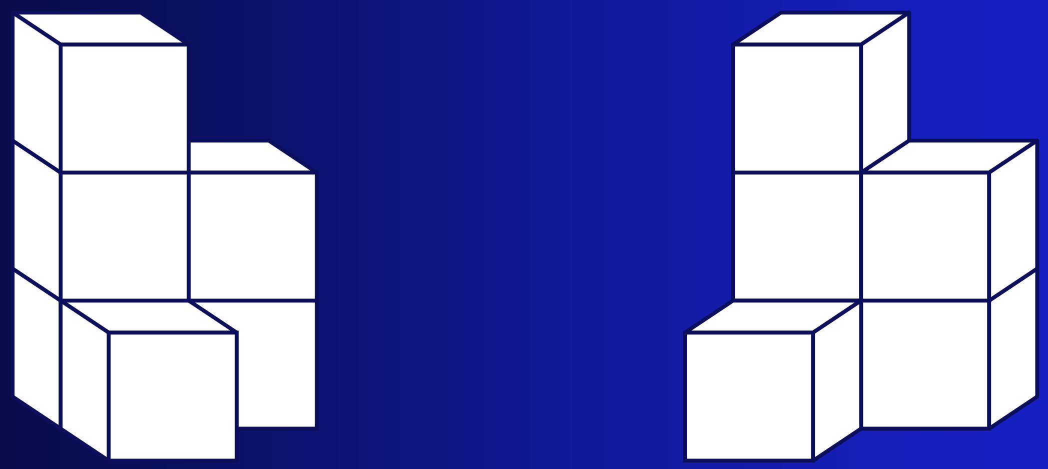




- umbauen oder neu bauen?
- verdeckte Würfel erfassen?



Würfelbauten (III)



- Bauwerke als gleich erkennen?
- den verdeckten Würfel erfassen?
- mental zum „Sechser“ umordnen?

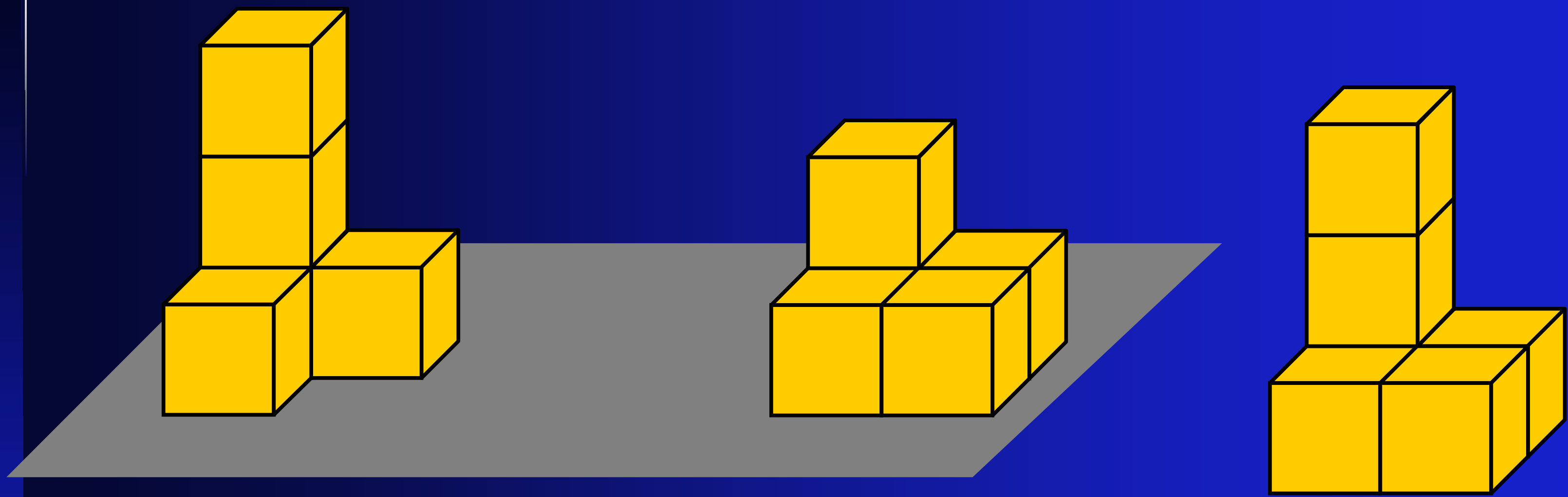
Ausgewählte Ergebnisse zu Würfelbauten

Etwa 73% der Kinder erkennen den verdeckten Würfel zunächst nicht,

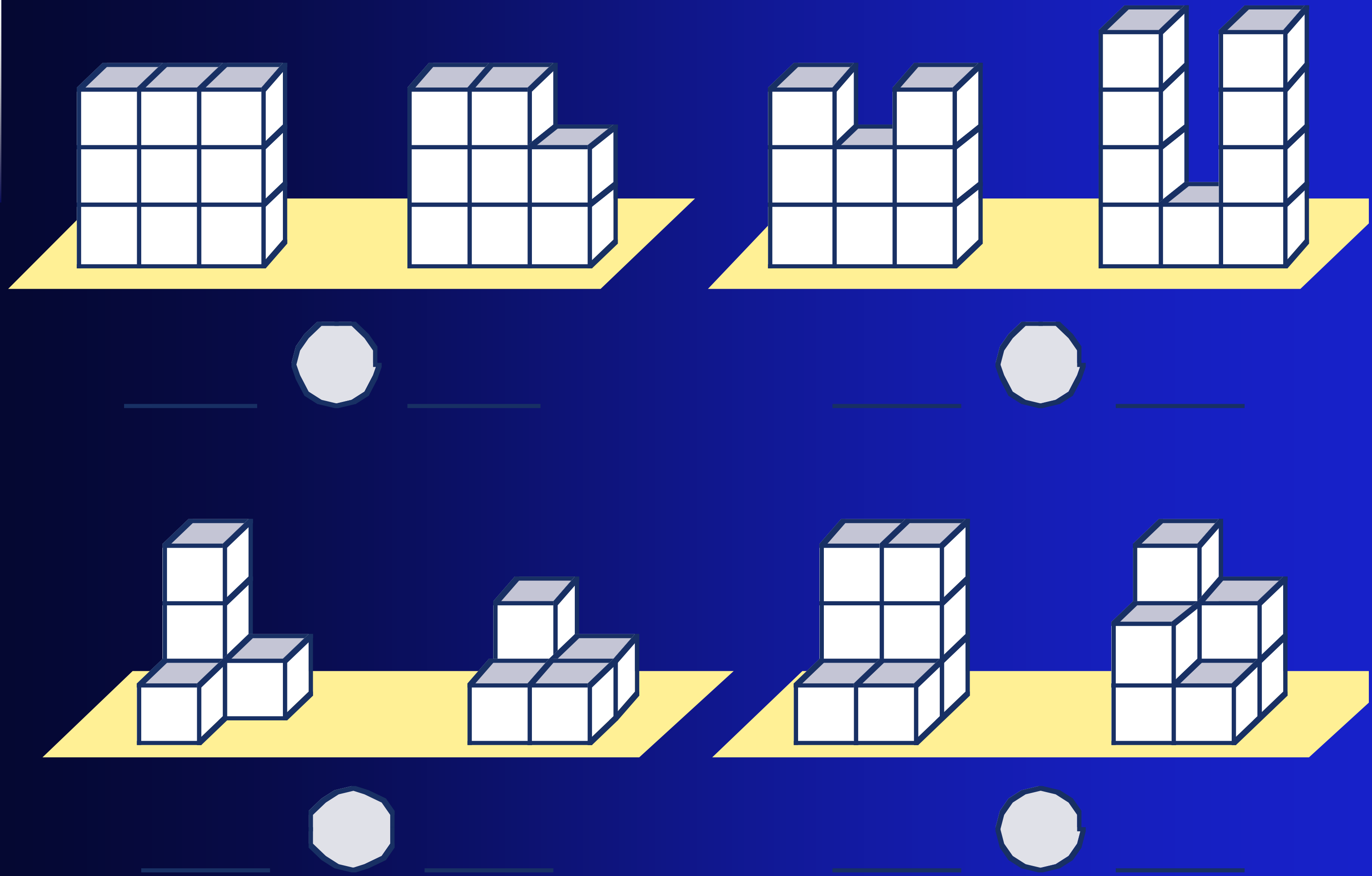
Bei dieser Aufgabe tritt der deutlichste Lernfortschritt auf:

80% der zunächst fehlerhaft arbeitenden Kinder erlangen ***beim Bauen*** Sicherheit, erkennen auch den verdeckten Würfel.

Anzahlen vergleichen - gedanklich umordnen

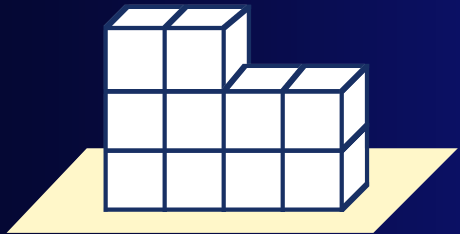


Anzahlen vergleichen - gedanklich umordnen

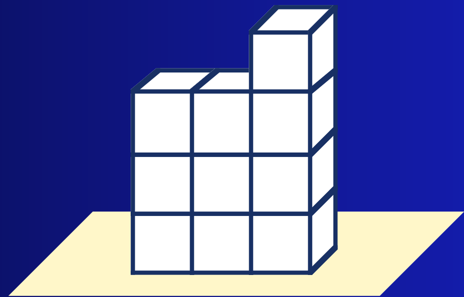


Operationsverständnis entwickeln

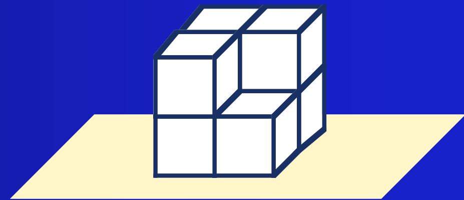
Färbe passend zur Aufgabe



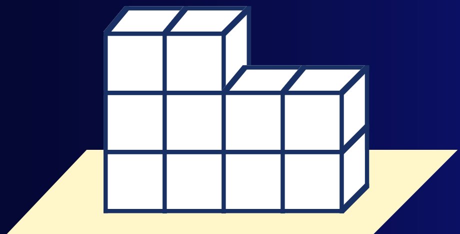
8 + 2



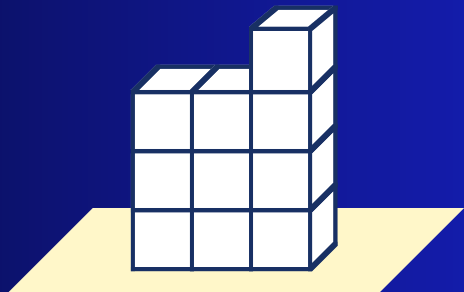
9 + 1



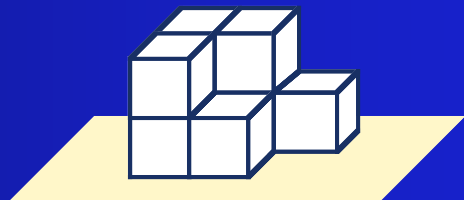
4 + 3



6 + 4



6 + 4



5 + 3

Die Idee der Form

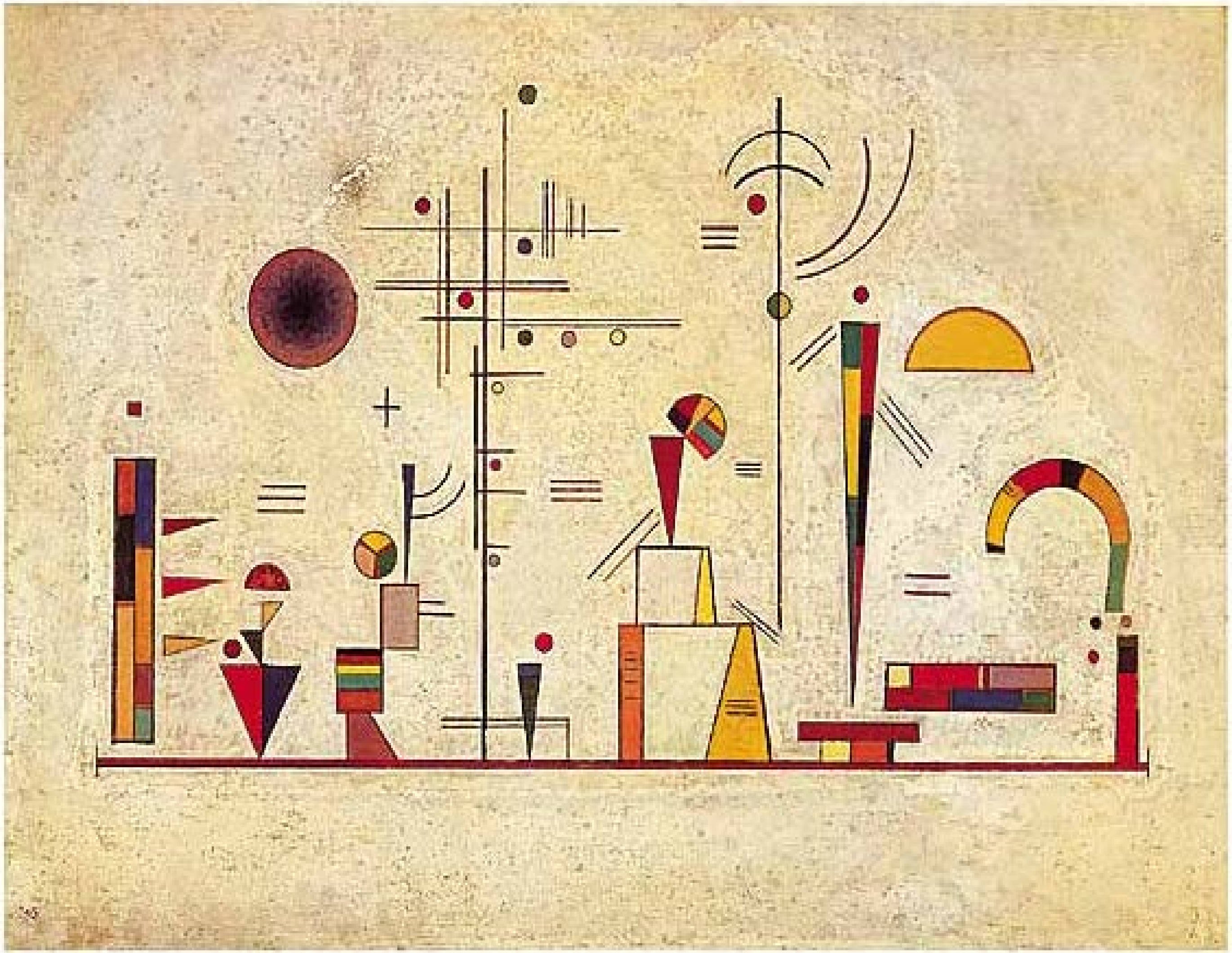
- Geometrische Objekte haben eine Form.
- Formen bestimmen auch die Verwendbarkeit von Objekten.
- Objekte sind nach ihrer Form vergleichbar.
- Anhand der Formen können die geometrischen Objekte klassifiziert werden (z.B. Dreieck, Viereck, Würfel, Linie, Punkt ...)

Eingesetzte Aufgaben

- Sortieren von Figuren
- Legen und Nachlegen mit Figuren
- Fortsetzen von Mustern
- Erfassen von Figuren, die nicht zur Gruppe gehören

Video sortieren

Begegnung mit Kunstwerken



Begegnung mit Kunstwerken

Ausgewählte Ergebnisse - Idee der Form

Kind erkennt nur ...	ja		nein		keine Aussage möglich		Ges.
... rechtwinklig - gleichschenklige Dreiecke als Dreieck	94	15,3 %	477	77,7 %	43	7,0%	614
gleichseitige Dreiecke als Dreieck	123	20,0 %	450	73,3 %	41	6,7 %	614
Rechtecke (darunter Quadrate) als Viereck	62	10,1 %	512	83,4 %	40	6,5 %	614
Quadrate als Viereck	188	30,6 %	385	62,8 %	41	6,7 %	614

Die Idee des Messens

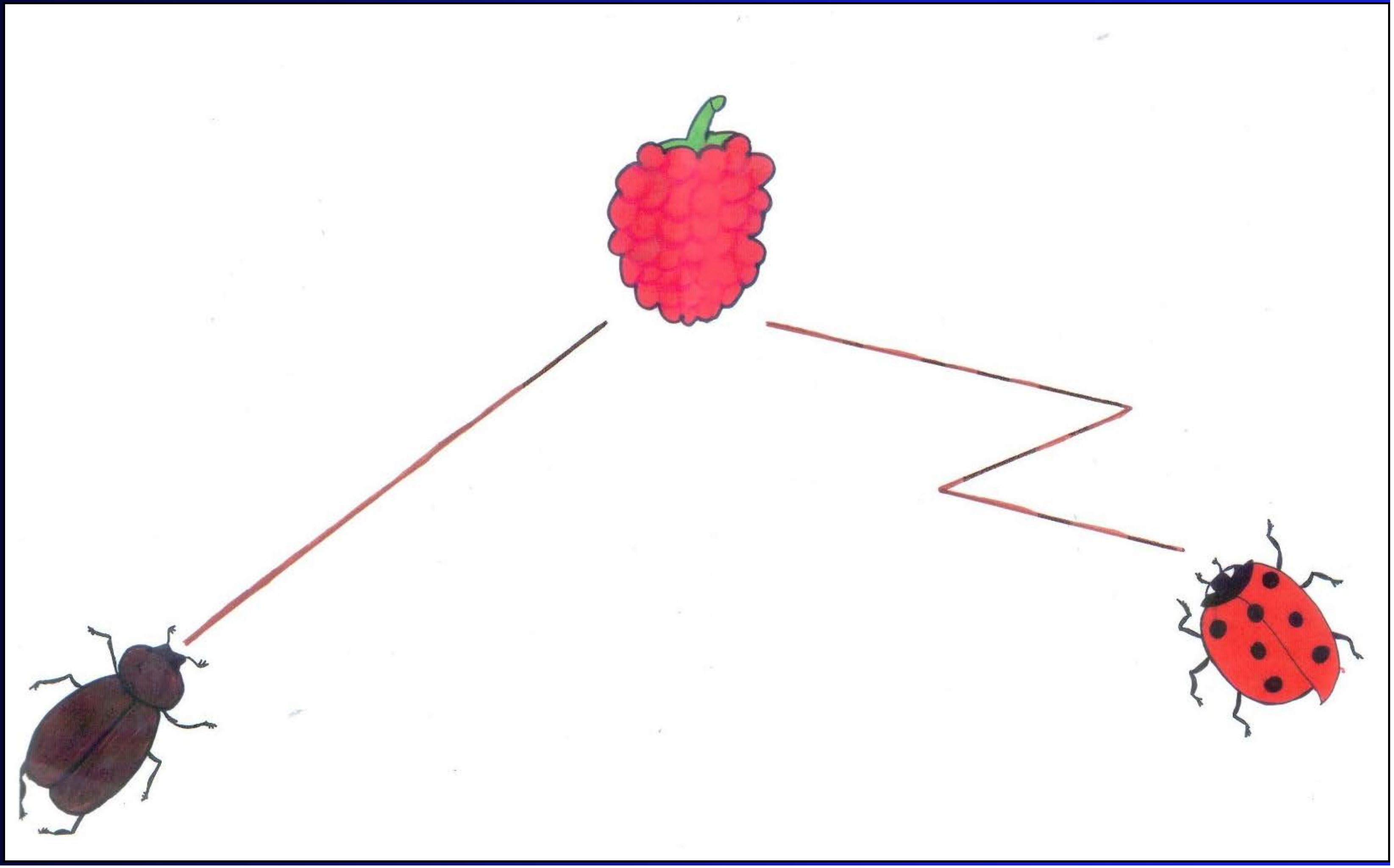
- Objekte besitzen qualitative Eigenschaften (Länge, Fläche, Volumen, Masse), die quantitativ verglichen und ausgedrückt werden können,
- Der Vergleich kann oft nur mittelbar durch Messen mit einer Einheit erfolgen (Fußlänge, Fingerbreite),
- Je größer die Maßeinheit gewählt wird, desto kleiner ist die Maßzahl,
- Willkürliche Einheiten wie Handspanne oder Schrittlänge sind oft brauchbar, haben aber Grenzen; normierte Einheiten sind oft unverzichtbar.

Eingesetzte Aufgaben

- Käfer und Himbeere (Vergleich von Längen)
- Frösche und Teiche (Vergleich von Flächen)
- Drachen (Vergleich von Flächen)

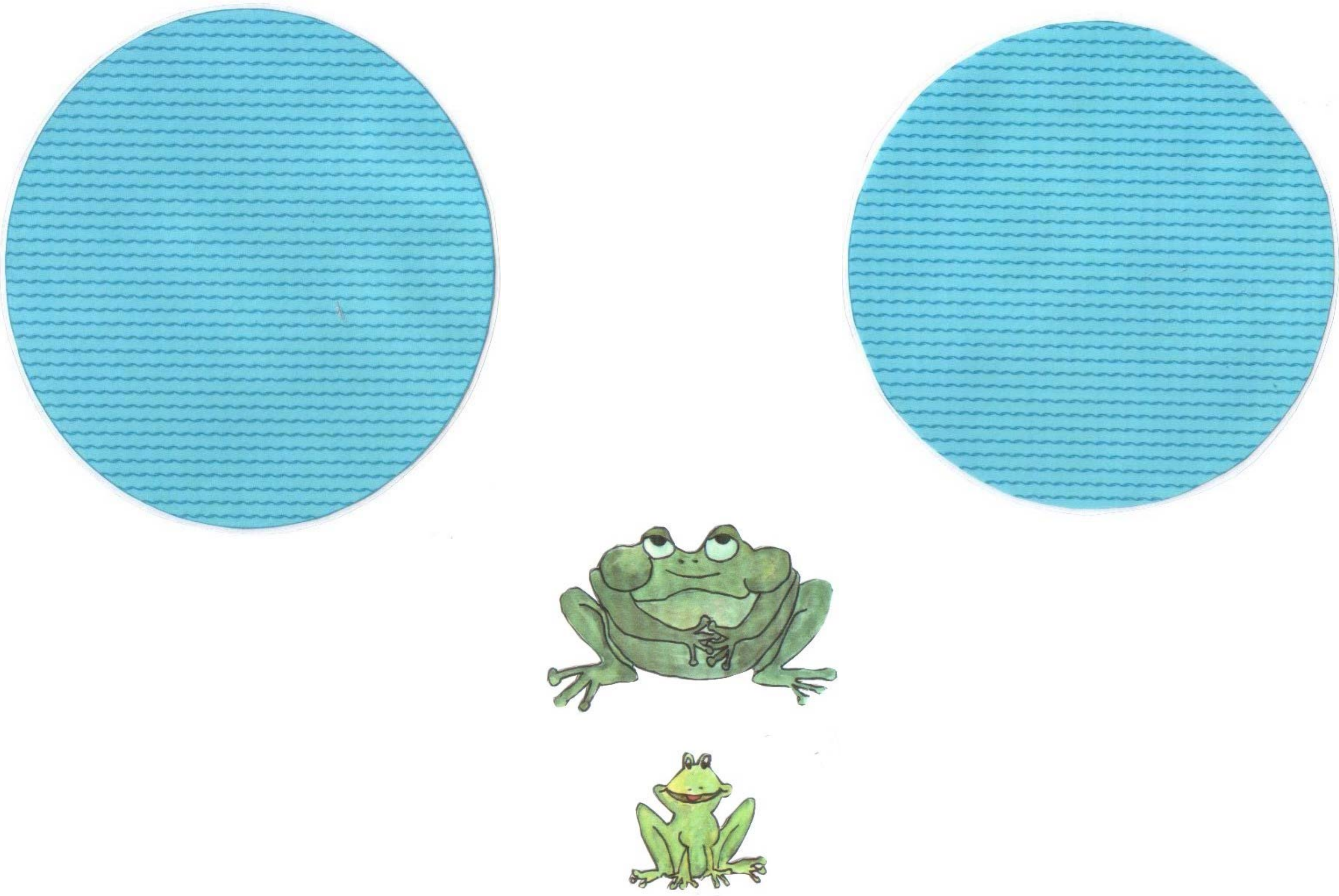
Käfer und Himbeere

Welcher Käfer hat den kürzeren Weg?



Frösche und Teiche

Der große Frosch wohnt im großen Teich. Setze ihn hinein.

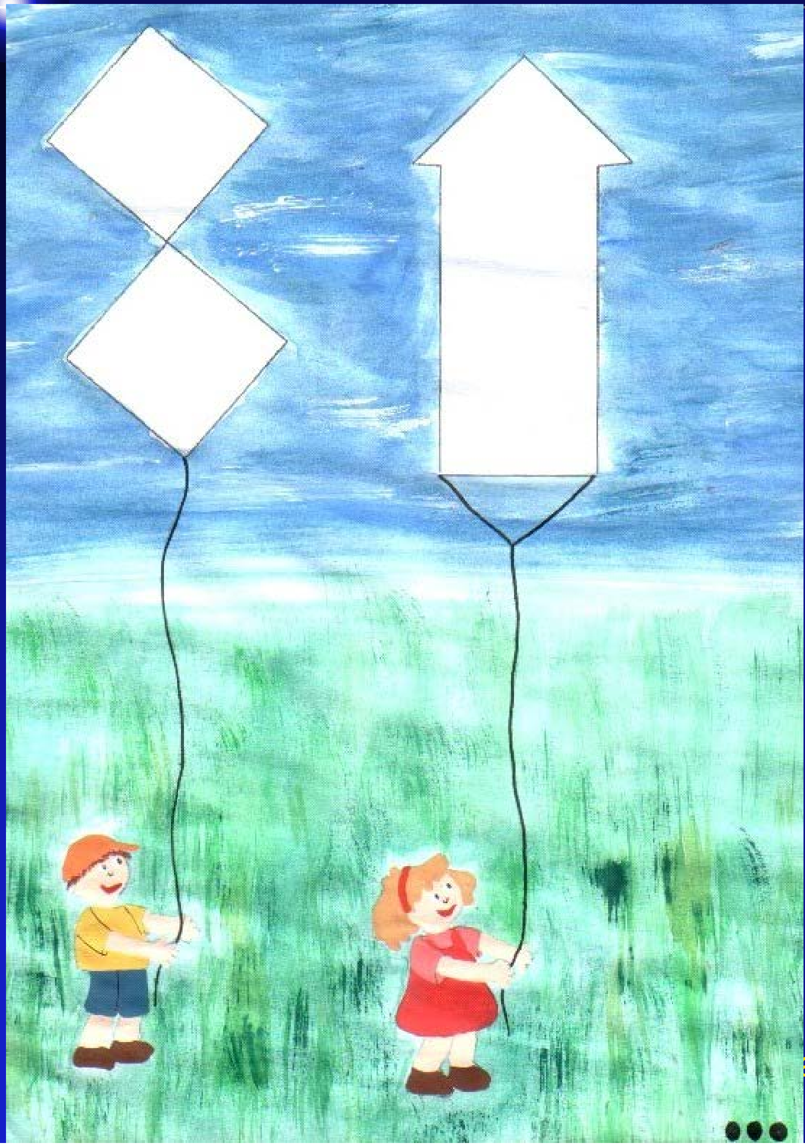


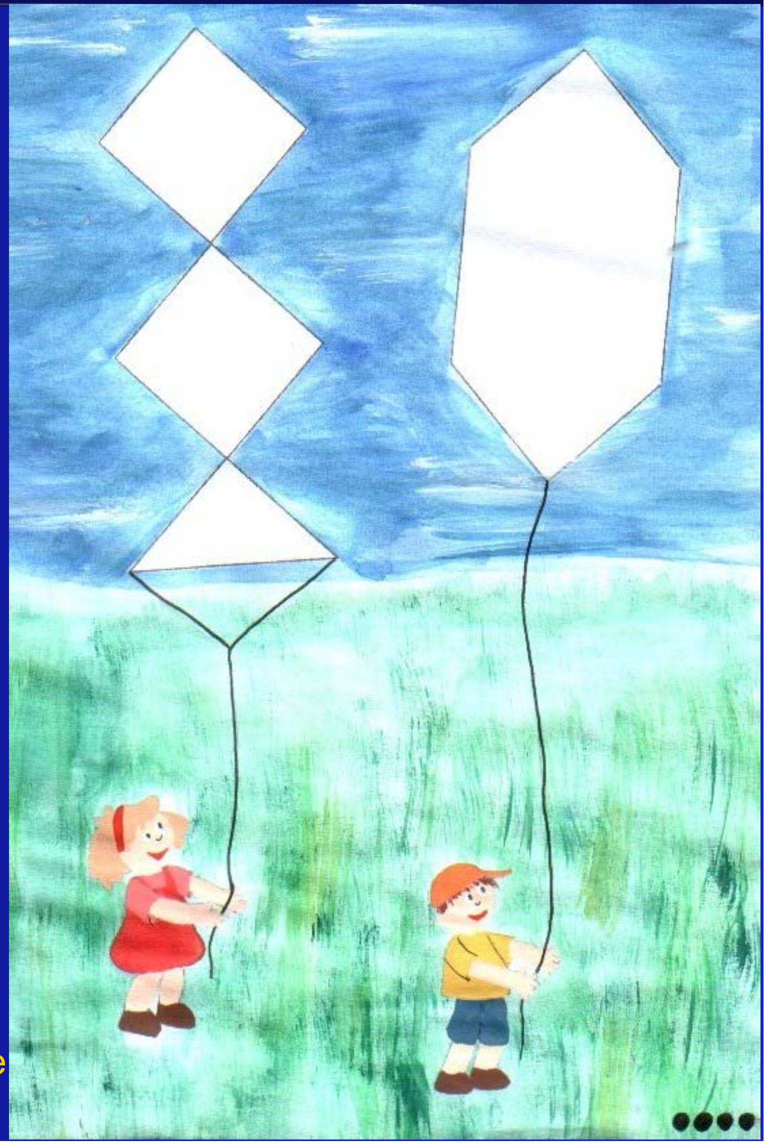
Video

Welcher Drachen ist größer?

Video

Welcher Drachen ist größer?





Welcher Drachen ist größer?

Video Tim

Welcher Drachen ist größer?

Was bedeutet eigentlich „größer"?

- hat eine größere Fläche
- ist länger
- hat mehr Ecken
- hängt an der längeren Schnur
- ist im Bild weiter oben ...

Ausgewählte Ergebnisse zu den Konzepten der Kinder zur Idee des Messens

Es wurden folgende 4 Niveaustufen des Vergleichens und Messens beobachtet:

- Grober Vergleich
- Direkter Vergleich
- Vergleich mit einem beweglichen Mittler
- Vergleich mit willkürlichen Einheiten

Stufe 1 - grober Vergleich

- erfolgt per Augenmaß, oft *ohne Handlung* (dass etwa ein Buch kleiner als der Tisch ist)
- oft genügt die nur Vorstellung (etwa dass ein Bleistift länger als der Radiergummi ist)
- zunehmende Erfahrungen ermöglichen ein immer feineres Vergleichen,
- zur Kontrolle kann das Kind handeln

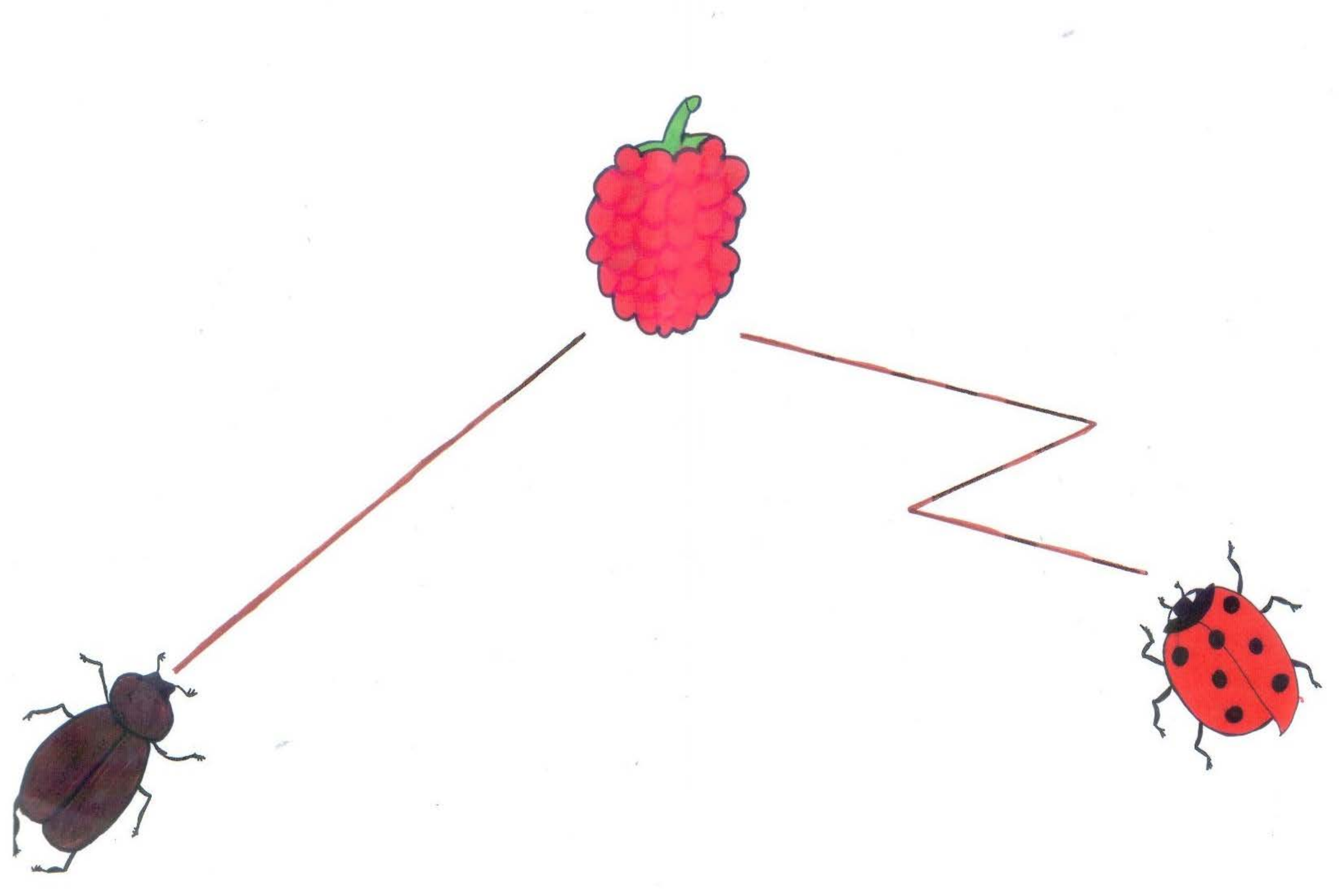
Stufe 1 - grober Vergleich

- Vergleich erfolgt per visueller Übertragung, die Bewegung des Blicks vermittelt
- Das Kind verlagert mit dem Blick bewusst die eine Fläche auf die andere.
- es versucht, die eine Fläche im Gedächtnis zu behalten, um sie gedanklich auf die andere zu legen.

Stufe 2 - direkter Vergleich

- Bei geringem Größenunterschied ist kein grober Vergleich möglich.
- Der direkte Vergleich wird vom Kind handelnd ausgeführt.
- Objekte werden ohne Zuhilfenahme von weiteren Gegenständen unmittelbar - z. B. durch Aufeinanderlegen - nach ihrer Größe verglichen und geordnet.

Welcher Käfer hat den kürzeren Weg zur Himbeere?



Stufe 2 - direkter Vergleich

Video

Kind 4

0.33	I: Und wie hast du das jetzt gesehen?
0.41	K: Vielleicht weil, wenn man das hier dran legt (legt Ast 2 neben Ast 1), denn ist das länger. (biegt Ast 2 auseinander und legt ihn neben Ast 1) Siehst du?
0.52	I: Ja gut, jetzt kann ich das auch sehen.

Stufe 4 - Vergleich durch Messen mit willkürlich gewählten Einheiten

Video

Stufe 4 - Vergleich durch Messen mit willkürlich gewählten Einheiten

0:00	I: Wer von beiden hat den kürzeren Weg? (…)
0:16	K: Der hier? (zeigt auf den Maikäfer)
0:17	I: Der hat den kürzeren? Meinst du, man kann das irgendwie prüfen?
0:21	K: Wie prüfen?
0:22	I: Na, irgendwie messen.
0:28	K: Weiß nicht.
	(…) (Anm.: akustisch nicht zu verstehen)

Stufe 4 - Vergleich durch Messen mit willkürlich gewählten Einheiten

0:52	K: (Trägt die Fingerspitze der rechten und linken Hand im Wechsel auf dem Ast 1 ab und zählt dabei leise) Neunzehn.
1:15	I: Und der andere Käfer?
1:16	K: (Verfährt in gleicher Weise beim Marienkäfer) Was kommt noch mal nach siebzehn? (Hält beim Zählen kurz inne)
	I: Achtzehn.

Stufe 4 - Vergleich durch Messen mit willkürlich gewählten Einheiten

	K: (bewegt die Finger und zählt lautlos) Zwölfzehn (ist an der Himbeere angekommen)
2:00	I: Du meinst zwanzig? (Anm.: wahrscheinlich meint das Kind zweiundzwanzig)
2:13	K: Hm. Und welcher ist jetzt kürzer?
2:15	I: Ja, welcher ist kürzer?
2:17	K: Der da. (Zeigt auf den Maikäfer)

Ausgewählte Ergebnisse

- 78% der Kinder wussten, was „länger als“ im umgangssprachlichen Kontext bedeutet.
- 41,6% der Kinder lösten die Aufgabe „Käfer.“
- 45,5% der Kinder lösen die Aufgabe „Frösche und Teich“.
- 42% der Kinder lösten die Aufgabe „Drachen 1“ richtig. All jene, die Konzept hatten, arbeiteten richtig.
- Nur 30,2% der Kinder *bearbeiteten* die Aufgaben Drachen 2 bis 4 mit einem tragfähigen Konzept.

Ausgewählte Ergebnisse

Die Niveaustufen des Vergleichens erklären die quantitativen Befunde:

- „Käfer“, „Frösche und Teiche“ sowie „Drachen 1“ können auf den Stufen 1 und 2 bearbeitet werden,
- Bei den Aufgaben „Drachen 2 bis 6“ hingegen ist der Vergleich nur indirekt möglich.
- Der indirekte Vergleich verlangt Einsicht in die Transitivität und das Zerlegen von Flächen.
- Das unterstreicht die große Bedeutung der Einsicht in die Transitivität für den Aufbau eines Messverständnisses

Ausgewählte Ergebnisse

Die Transkripte zeigen,

- Kinder lernen schnell, wenn sie dazu Gelegenheit erhalten (es sind wenige Minuten, in denen Entscheidungen reifen, geprüft und korrigiert werden)
- geduldiges Einfordern von Erklärungen und Begründungen veranlasst zum Lernen
- geduldiger Partner veranlasst Kinder zu höherer Leistung
- Verstehensprozesse weisen für den mit dem Messen vertrauten Erwachsenen oft unerwartete Züge auf (Fehlvorstellungen etc.)

Geometrische Vorerfahrungen von Schulanfängern

- Problemlage
- Anlage der Untersuchung
- Ausgewählte Ergebnisse
- Konsequenzen

Konsequenzen

Kinder brauchen

- Gelegenheit zur Konstruktion von Konzepten,
- durchdachte, produktive Lernumgebungen,
- einen qualifizierten Begleiter beim Arbeiten mit diesen Lernumgebungen,

Konsequenzen

- Subjektive Konzepte von Kindern sollten genutzt, diskutiert nicht durch die zu schnelle Vorgabe von Lösungswegen unterdrückt werden.
- Es steht die Wahl zwischen Konstruktion sowie Reiz und Reaktion: Dort, wo die Kinder nicht aktiv konstruieren können, siegt das Reiz-Reaktions-Lernen.
- Von der Vielfalt der Ideen in einer Gruppe können alle Kinder profitieren - das ist soziales Lernen aus der Sache heraus.

Konsequenzen

- Mathematische Bildung in den Vorschuljahren muss Bestandteil eines einheitlich konzipierten Bildungsganges bis hin zur Sekundarstufe II sein.
- Passfähigkeit kann durch Ausrichtung an den fundamentalen Ideen gesichert werden.
- Beispiel: Bildungsplan KITA für M-V

Mathematische Bildung im Vorschuljahr

Es ist nicht nur ein Gebot der Effizienz, sondern zuerst im Interesse der Entwicklung des Kindes, sich bietende Entwicklungschancen zu nutzen.

- In diesem Sinne geht es einmal um das Nutzen all jener sich ohnehin bietenden Lernanlässe.
- Darüber hinaus gilt es, solche Lernanlässe gezielt zu schaffen, die den Möglichkeiten des Kindes zum Lernen Rechnung zu tragen.

Mathematische Bildung von 3 bis ...

- muss die Erfahrungswelt des Kindes, seine Umwelterfahrungen seinen Tagesablauf, berücksichtigen, muss daran anknüpfen,
- muss von den verschiedenen subjektiven Erfahrungsbereichen des Kindes ausgehen, also gewissermaßen aus der Kindperspektive aufgebaut werden und
- muss dabei dennoch die Fachsystematik im Auge behalten (Was sind die Wesenszusammenhänge? Was wird wofür benötigt, wann aufgegriffen usw.)

Mathematische Bildung von 3 bis ...

- ist deshalb auf die fundamentalen Ideen des Faches konzentriert,
- macht die Kinder mit diesen Ideen vertraut,
- greift die Ideen immer wieder spiralförmig auf, wobei die Kinder ihre Einsichten vertiefen.

Literatur

Artikel zum Thema unter www.mathematikus.de

weitere Literaturangaben beim Verfasser abrufbar

mathematikus@mathematikus.de

Abbildungen
Kandinsky - Ernst und Spaß
satirische Zitate aus den Materialien „Zahlenland“ und „Komm mit ins Zahlenland“

Alle anderen Materialien aus der Untersuchung im Projekt EGOS